MANUAL DE TRIGONOMETRIA.

Por ausencia de D. Ygn.º ti
Man.l Bachi

MANUAL DE TRIGONOMETRÍA.

POR

D. Fausto de la Vega,
catedrático de la Universidad de esta Córte.

MADRID.

IMPRENTA DE D. IGNACIO BOIX, EDITOR,
calle de Carretas número 27.

1846.

PROLOGO.

Aunque la Trigonometría no sea en realidad mas que una seccion de la aplicacion del Algebra à la Geometria, como sus aplicaciones usuales son mas numerosas que las de la teoría de las curvas y de la determinacion de los puntos y líneas en un plano ó en el espacio; son muchas las personas que sin necesitar de esta última parte de la geometria analítica, tienen necesidad de aprender la Trigonometria rectilinea. Por esta razon se han tratado dichas materias por separado en esta coleccion de manuales, pues de este modo les será mas fácil y menos costoso à cualquiera proveerse únicamente de la parte que necesite.

Acaso no falte quien crea que el presente manual, para merecer el nombre de tal, debia haberse ceñido à mas estrechos límites; pero téngase presente, que no se podia omitir nada de cuanto en él se espone, sin hacerle quizá inútil para la enseñanza. La única novedad que ofrece y que podria creerse supérflua es la de hacer de los senos versos y susenos versos un uso que no se hace en los demas tratados de este ramo de las Matemáticas; pero á esto se puede responder que haciéndose uso en todos ellos de las espresiones 1—*cos.* y 1+*cos.* para deducir varias fórmulas en la trigonometria esférica, es mas sencillo poner en lugar de dichas espresiones una línea trigonométrica equivalente á ellas: tanto mas cuanto que deduciéndose inmediatamente las fórmulas correspondientes á dichas líneas, podria ahorrarse la deducion de las otras si se generalizase el uso de tablas que contuviesen los logaritmos de los espresados senos versos y susenos versos.

TRIGONOMETRIA RECTILINEA.

1. Por los principios de la geometría elemental, se sabe que siempre que se conozcan tres de las seis cosas de que consta un triángulo, se le puede construir, con tal de que entre ellas haya siquiera un lado; y se sabe tambien, que aun cuando las tres cosas dadas fuesen los tres ángulos, la relacion que hubiese entre los lados no podia ser arbitraria. Si se tratase, por ejemplo, de un triángulo que tuviese un ángulo de 90.°, otro de 50.° y otro de 40.°; aunque podríamos construir cuantos quisiésemos con dichos datos, no podríamos determinar el valor de los lados á nuestro antojo, sino que precisamente el lado mayor tendria que ser igual á la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los otros dos lados, por ser rectángulo el triángulo; y aun el valor de los catetos no podría ser tampoco arbitrario, pues depende de la magnitud de los ángulos opuestos.

Con lo dicho basta para conocer que hay una dependencia mútua entre los lados y los ángulos de los triángulos, y para conocer tambien cuan ventajoso sería hallar algun modo de determinar los unos por medio de los otros, valiéndose del cálculo. De esta manera se lograría tener el valor de las partes buscadas con toda la exactitud que se quisiese, lo que no se conseguiría construyendo un triángulo igual ó semejante al propuesto, porque la imperfeccion de los instrumentos no permite que se puedan apreciar los minutos ó segundos de un ángulo, ni las partes de unidad que pudiesen tener los lados.

2. La operacion de hallar la magnitud de tres partes de un triángulo por medio de las otras tres, valiéndose del cálculo, se llama *resolucion*; y el ramo de las matemáticas que trata de la resolucion de los triángulos se llama *Trigonometría*.

Como no son solo los triángulos rectilíneos los que queden resolverse sino que tambien se pueden resolver, los formados sobre la superficie de una esfera por arcos de círculos máximos, se divide la trigonometría en *plana ó rectilinea*, que es *la que trata de la resolucion de los triángulos rectilíneos*; *y esférica*, que es *la que trata de* la resolucion de los triángulos *esféricos*, esto es, de los formados por arcos de círculos máximos de una esfera.

3. Contrayèndonos por ahora á la trigonometría rectilínea, observaremos que los casos de resolucion que pueden ocurrir son los siguientes:

Conocidos los tres lados de un triángulo, determinar sus tres ángulos.

Conocidos dos lados y un ángulo, determinar el otro lado y los otros dos ángulos: pero este caso se subdivide en dos, à saber: *que el ángulo conocido sea el formado por los dos lados que se dan, ó que sea el opuesto á uno de ellos.*

Conocido un lado y dos ángulos, determinar el ángulo restante y los otros dos lados. Este caso se puede tambien subdividir en dos si se quiere, á saber: que *los dos ángulos sean los adyacentes al lado conocido, ó* que *el uno de ellos sea el opuesto al mismo lado.*

Por ùltimo, podrá tambien suceder que *no se conozca el valor de ninguno de los lados de un triángulo, pero sí el de sus tres ángulos*; en cuyo caso no es posible resolver el triángulo, porque puede haber una infinidad de ellos con aquellos mismos datos.

4. Tambien podremos observar, que *si cualquier triángulo tal como* ABC, (fig. 1) *se inscribe en un círculo, cada uno de sus lados queda por cuerda de un arco duplo del que mide al ángulo opuesto.* En efecto, espresando cada uno de los lados por la letra minúscula igual á la mayúscula que esprese el ángulo opuesto, segun se ve en la figura, vemos que el ángulo A, por ser inscrito tiene por medida la mitad del arco BC; pero el lado *a* es cuerda de el arco BC; luego dicho lado *a* es cuerda de un arco duplo del que sirve de medida al ángulo

A. Como se puede decir lo mismo respecto de los demas ángulos y lados, no puede ya quedar duda acerca de la exactitud de las ecuaciones siguientes

a=cuerda 2A. b=cuerda 2B; c=cuerda 2C.

De aqui resulta, que *los lados de todo triángulo tienen entre sí la misma razon que las cuerdas de los duplos de las medidas de los angulos opuestos á los mismos*: pues formando série de razones con las tres ecuaciones anteriores, se tendrá

a: *b*: *c*: : cuerda 2A: cuerda 2B: cuerda 2C.

Y esta proposicion se verificará aun cuando se tomarán dichos arcos en otro círculo distinto de aquel en que está inscrito el triángulo; pues por ser semejantes todos los círculos, se verifica tambien que las cuerdas correspondientes á arcos de un mismo número de grados, son proporcionales entre sí y con los radios: de modo que llamando 2A′, 2B′, 2C′ los arcos de igual número de grados que 2A, 2B, 2C, y tomados en otro círculo, se tendrá cuerda 2A: cuerda 2A′: : cuerda 2B: cuerda 2B′ y finalmente

a: b: : cuerda 2A′: cuerda 2B′

5. Esta proposicion nos abre ya un camino para resolver los triángulos en los casos posibles; pero si en vez de valernos de los duplos de los arcos que son medida de los ángulos, quisiéramos valernos de estos mismos arcos, lo podríamos conseguir fácilmente obser-

vando, que si desde el centro O del círculo (fig. 1) se tiran tres radios respectivamente perpendiculares á cada uno de los lados del triángulo, dichos radios dividirán en dos partes iguales (Man. de Geom. §. 45) tanto á dichos lados como á cada uno de los arcos ADB, BEC y AFD. De aquí resulta que las mitades Ac, Ba y Ab de los lados del triángulo quedan como perpendiculares bajadas desde uno de los estremos del arco que mide al ángulo opuesto hasta el radio que pasa por el otro estremo de dicho arco.

Se da á estas perpendiculares el nombre de *senos rectos*, ó simplemente *senos* de los arcos á que corresponden: de manera que se puede decir que *seno de un arco es la perpendicular bajada desde uno de sus estremos al radio ó diámetro que pasa por el otro estremo.* Tambien podemos estar seguros á consecuencia de lo que se acaba de esponer, que *el seno de cualquier arco es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.*

6. Ademas de los senos se consideran en cada arco otras tres líneas, que son: *el seno verso*, *la tangente y la secante*, y se da colectivamente á todas cuatro el nombre de líneas trigonométricas.

Se da el nombre de *seno verso al segmento de radio ó diámetro interceptado entre el pie del seno y el origen del arco.* Si fuese el arco AB (fig. 2) su seno seria BC y su seno verso AC.

La *tangente trigonométrica* de un arco es *el segmento de tangente geométrica interceptado entre el punto del contacto, que es el origen del arco, y el radio prolongado que pasa por el otro estremo.* Asi la tangente trigonométrica del mismo arco AB es AD.

Por último, se da el nombre de *secante al radio prolongado hasta encontrar á la tangente*: de modo que la secante del arco AB es la recta OD.

7. Como todo arco tiene estas cuatro líneas, el complemento del arco AB que es el arco BE debe tenerlas igualmente; pero á las líneas del complemento de un arco se les da tambien el nombre de *colíneas* del mismo arco: de modo que se llama *coseno* de un arco *el seno de su complemento.* Asi el coseno de AB es BF; y como BF=CO por partes de paralelas interceptadas entre otras paralelas, se dice que *el coseno de un arco es igual al segmento de radio interceptado entre el pie del seno y el centro del círculo. Coseno verso* de un arco es *el seno verso de su complemento*: de manera que el coseno verso de AB es EF, *cotangente, es la tangente del complemento*: la cotangente de AB es EG. *Cosecante es la secante del complemento,* de modo que la secante de AB es OG.

Resulta de lo espuesto, que agregando á las cuatro líneas trigonométricas de cada arco las cuatro colíneas, se puede decir que hay ocho líneas trigonométricas que son las ya nombradas. Es de advertir, que aunque estas son las únicas líneas trigonométricas reconocidas por todos los autores, y de que se hace mencion en todos los tratados, D. José Mendoza y Rios, capitan de navío de la marina española, dió el nombre de *suseno verso* de un arco al seno verso de su complemento, de manera que el suseno verso del arco AB es LC, y en esta obra admitiremos tambien dicha línea, porque nos será de alguna utilidad en lo sucesivo.

8. Es digno de notarse, que *todas las líneas y colíneas de un arco pueden apreciarse en valores del radio y del seno del mismo arco.*

En efecto, entre el radio OB el seno BC y el coseno OC forman un triángulo rectángulo que nos dará

$$OC = \sqrt{\overline{BO}^2 - \overline{BC}^2}$$

ó lo que es lo mismo,

$$\cos = \sqrt{R^2 - \operatorname{sen}^2},$$

representando por R el radio del círculo.

Para hallar la espresion del valor de la tangente, compararemos entre si los dos triángulos semejantes BOC, y AOD, con lo que tendremos la siguiente proporcion CO : BC : : AO : AD : de donde se infiere que

$$AD = \frac{AO \times BC}{CO};$$

ó lo que es lo mismo

$$tang. = \frac{R \times sen}{cos.}$$

si ahora sustituimos en lugar de coseno su igual

$$\sqrt{R^2 - sen^2}$$

tendremos

$$tang. = \frac{R \times sen.}{\sqrt{R^2 - sen.^2}}$$

La comparacion de los mismos triàngulos nos dará tambien esta otra proporcion CO: BO: : AO: DO, de la cual resulta

$$DO = \frac{BO \times AO}{CO}$$

que sustituyendo viene à ser

$$sec. = \frac{R^2}{cos.},$$

ó $$sec.=\frac{R^2}{\sqrt{R^2-sen^2}}$$

En cuanto al seno verso AC, se ve que es igual al radio AO menos el coseso CO: esto es,

$$sen.\ ver.=R-cos.=R-\sqrt{R^2-sen^2}.$$

Del mismo modo se ve que el suseno verso LC es igual al radio mas el mismo coseno CO; esto es: $sus.\ ver=R+cos.$

Aunque las fórmulas relativas á la cotangente EG y á la cosecante GO se podrian hallar directamente comparando entre si los dos triángulos semejantes BCO y OEG, podremos tambien hallarlas sin mas que observar que la cotangente de un arco es la tangente de su complemento: de donde se infiere que....

$$cot.=tang.\ complem.=\frac{R\times sen.\ complem.}{cos.\ complem.}$$

$$=\frac{R\times cos.}{sen.}$$

Del mismo modo se hallará que

$$cosec.=sec.\ complem.=\frac{R^2}{cos.\ complem.}=\frac{R^2}{sen.}$$

cos. ver.=sen. ver. complem.=R−cos. complem.=R−sen.

9. Si se tomase por unidad el radio del círculo, como comunmente se hace, seria R=1 y las fórmulas anteriores se convertirán en las siguientes:

$$cos.=\sqrt{1-sen^2} \qquad tang.=\frac{sen}{cos.}=\frac{sen}{\sqrt{1-sen^2}}$$

$$sec.=\frac{1}{cos.}=\frac{1}{\sqrt{1-sen^2}} \qquad sen.\ ver.=1-cos.$$
$$=1-\sqrt{1-sen^2}$$

$$cot.=\frac{cos.}{sen.}=\frac{\sqrt{1-sen^2}}{sen.} \qquad cosec.=\frac{1}{sen.}$$

$$cos.\ ver=1-sen. \qquad sus.\ ver=1+cos.$$

10. Fácil es conocer que ademas de las fórmulas halladas en los dos párrafos anteriores, se pueden hallar otras muchas que espresen los valores de las líneas trigonométricas. Por ejemplo, atendiendo á que toda cuerda es media proporcional entre el diámetro y el segmento correspondiente á la misma cuerda, veremos que si se tira la cuerda AB del arco ADB que representaremos por A, (fig. 3) se verificará que ∺ 2R : AB : AC; de donde mul-

tiplicaremos estremos y medios, se deduce la ecuacion

$$2R\times AC=\overline{AB}^2$$

Pero AC es el seno verso del arco dado y AB es la cuerda del mismo: por lo que sustituyendo, se tendra $2R\times sen.\ ver.\ A=$ cuerda^2 A: y como cuerda $A=2$ sen $\frac{1}{2}$ A (§ 5), se transformará tambien la ecuacion anterior en $2R\times sen.\ ver.\ A=4\ sen^2\ \frac{1}{2}\ A$, y por último.

$$sen.\ ver.\ A=\frac{2\ sen^2\ \frac{1}{2}\ A}{R}$$

que tomando el radio por unidad, será $sen.\ ver.\ A=2\ sen^2\ \frac{1}{2}\ A.$

Igualmente se tendrà que $\div 2R : BL : LC$, y de esta proporcion se deduce que

$$LC=\frac{\overline{BL}^2}{2R}$$

Pero LC es el suseno verso del arco AB y BL es la cuerda de su suplemento: lo que quiere decir que la ecuacion anterior se transformará sustituyendo, en

$$sus.\ ver.\ A=\frac{cuerda^2\ (H-A)}{2R}$$

Atendiendo ahora à que cuerda $(H-A)=2$ *sen.* $(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}A)$ y que *sen.* $(\frac{1}{2}H=\frac{1}{2}A)=$*cos.* $\frac{1}{2}A$, se tendrá sustituyendo en la fórmula anterior

$$sus.\ ver.\ A=\frac{4\ cos.^2\frac{1}{2}A}{2R}=\frac{2\ cos.^2\frac{1}{2}A}{R}$$

que si se toma el radio por unidad, se reduce á *sus. ver.* $A=2\ cos.^2\frac{1}{2}A$.

Si fijamos nuestra atencion en que entre la secante DO, el radio AO y la tangente AD (fig. 2) forman un triángulo rectàngulo cuya hipotenusa es la secante, y que esto mismo sucede en cualquier otro arco, podremos deducir las fórmulas

$$sec.=\sqrt{R^2+tang.^2}$$

y $$tang.=\sqrt{sec.^2-R^2}$$

ó tomando el radio por unidad,

$$sec.=\sqrt{1+tang.^2}\qquad tang.=\sqrt{sec.^2-1}$$

De estos fórmulas se infiere que

$$cosec.=\sqrt{R^2+cot.^2},$$

ó $$cosec. = \sqrt{1 + cot.^2},$$

y $$cot. = \sqrt{cosec.^2 - R^2}$$

ó $$cot. = \sqrt{cosec.^2 - 1}.$$

Tambien se infiere de las halladas últimamente para el seno verso y el suseno verso que

$$\frac{sen.\ ver.\ A}{sus.\ ver.\ A} = \frac{2\ sen.^2\ \frac{1}{2}\ A}{2\ cos.^2\ \frac{1}{2}\ A} = tang.^2\ \tfrac{1}{2}\ A$$

y de esta deduciremos que

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\ A = \frac{\sqrt{sen.\ ver.\ A}}{\sqrt{sus.\ ver.\ A}}$$

Por la inversa

$$\frac{sus.\ ver.\ A}{sen.\ ver.\ A} = \frac{2\ cos.^2\ \frac{1}{2}\ A}{2\ sen.^2\ \frac{1}{2}\ A} = cot.^2\ \tfrac{1}{2}\ A$$

y $$cot.\ \tfrac{1}{2}\ A = \frac{\sqrt{sus.\ ver.\ A}}{\sqrt{sen.\ ver.\ A}}$$

11. Bien se ve que cuando no hay arco, ó lo que es lo mismo, cuando el arco de que se trate valga *cero*, valen tambien *cero* el seno, el seno verso y la tangente; pero no la secante, que en tal caso es igual al radio: lo que está conforme con su definicion, pues siendo la secante el radio prolongado hasta encontrar á la tangente, cuando falte esta será aquella el radio sin prolongar. Tenemos pues que

sen. O=O sen. ver. O=O
tang. O=O sec. O=R
sus ver. O=2R

Se ve tambien que á medida que va creciendo el arco sin llegar á un cuadrante, van creciendo dichas cuatro líneas trigonométrfcas: como se puede comprobar comparando las correspondientes al arco ABC (fig 2) con las correspondientes al arco AB cuyo seno es ab, el seno verso Aa, la tangente es Ad y la secante Od. De aqui se infiere, que las colíneas irán disminuyendo, porque á medida que va creciendo un arco menor que un cuadrante, va disminuyendo su complemento. En cuanto al suseno verso tambien va disminuyendo desde que empieza á crecer el arco hasta que llega á valer una semicircunferencia.

Cuando el arco llega á valer un cuadrante, tal como ABE, (fig. 2) su seno EO y su seno verso AO son, segun se vé, iguales al radio:

su tangente y su secante, son infinitas porque en este caso son paralelas entre sí, y por consiguiente no pueden terminarse una á otra. En cuanto á las colíneas, como son las líneas del complemento, tendrán los valores hallados antes para las líneas del arco=O; porque el complemento de un cuadrante es cero. Por consiguiente, representando la circunferencia por 2H, ó lo que es lo mismo, el cuadrante por $\frac{1}{2}$ H se tendrá

sen. $\frac{1}{2}$ H=R	*sen. ver.* $\frac{1}{2}$ H=R
tang. $\frac{1}{2}$ H=∞	*sec.* $\frac{1}{2}$ H=∞
cos. $\frac{1}{2}$ H—O	*cos. ver.* $\frac{1}{2}$ H=O
cot. $\frac{1}{2}$ H=O	*cosec.* $\frac{1}{2}$ H=R
sus. ver. $\frac{1}{2}$ H=R	

12. Luego que el arco pasa de un cuadrante, como por ejemplo el ABF, (fig. 3) su seno empieza á disminuir, pues segun se ve en la figura, el seno de ABF es FG, y FG es menor que EO seno del cuadrante. Esta circunstancia no debe causar estrañeza si se tiene presente que segun queda dicho, (§. 5) el seno de un arco es la mitad de la cuerda del arco duplo, y que las cuerdas van creciendo hasta que llega el arco á valer una semicircunferencia, pero empiezan á disminuir desde que el arco pasa de los 180.° Esto mismo se verifica respecto de la secante y la tangente, las cuales son infinitas en el cuadrante ABE y ahora se

reducen, la primera à OM y la segunda à AM. En cuanto al seno verso, que ahora es AG, es la única de las lìneas que continua creciendo aunque pase el arco de un cuadrante: asi como el suseno verso continua menguando.

13. Es digno de notarse, que al pasar la secante y la tangente del valor infinito que tenian cuando el arco era igual á un cuadrante al valor determinado correspordiente à un arco mayor, varían de posicion con relacion al diámetro AL que va á parar al origen A del arco. En efecto, cuando el arco es menor que un cuadrante, dichas dos rectas estan situadas por la parte superior de dicho diámetro; como se ve en las OD y AD: (fig. 2) cuando el arco llega á ser el cuadrante, dichas dos rectas son como ya se ha dicho, paralelas, y por consiguiente se estienden indefinidamente tanto hácia la parte superior como hácia la inferior del diámetro que pasa por el origen: por último cuando el arco pasa de los 180.º la tangente y la secante, que son ya finitas quedan situadas únicamente por la parte inferior del diámetro citado. Esta diferencia en las posiciones relativas de las líneas se espresa en el càlculo con los signos algebráicos + y —; anteponiendo este último á todas la que tienen una posicion ó direccion contraria á la de las líneas del primer cuadrante: de donde se infiere, que *en el segundo se mirarán como positivos el seno, el coseno verso y la cosecante; y como negativos*

el coseno, la secante, la tangente y la cotangente: el seno verso, y el suseno verso son siempre positivos. Tambien se infiere de lo dicho, que á los valores infinitos de la tangente y la secante de $\frac{1}{2}$H corresponden en rigor los dos signos $+$ y $-$; de modo que deberá decirse que *sec.* $\frac{1}{2}$ H $= \pm\infty$ y *tang.* $\frac{1}{2}$ H $= \pm\infty$.

En la fig. 3 se ve en efecto que al arco AEF mayor que un cuadrante, corresponden el seno FG, el seno verso AG, el suseno verso GL, la cosecante ON y el coseno verso EP; que deben mirarse como líneas positivas, por cuanto su direccion es semejante á la que tienen las correspondientes al primer cuadrante ABE. No sucede lo mismo respecto del coseno FP cuya direccion es ahora hàcia la parte interior del arco dado, en vez de que en el primer cuadrante es hácia la parte esterior. Esto mismo se verifica tambien en la cotangente EN, que ahora se dirige desde el estremo del cuadrante hácia la parte esterior del arco, en vez de que cuando este valía menos de 180.°, como el AB (fig. 2), la cotangente se dirigia desde el estremo del cuadrante hácia la parte interior del arco. En cuanto á la tangente del arco AEF (fig. 3) se ve bien que es AM, pues el radio OF tirado por el estremo F de dicho arco no puede encontrar à la tangente tirada por el origen A del arco sino por la parte inferior. Así pues, tanto esta línea como la secante OM deben mirarse como negativas.

14. Cuando el arco llega à valer toda la semicircunferencia, AEL su complemento es el cuadrante EFL; por consiguiente tendremos

sen. $H=O$	*sen. ver.* $H=2R$
tang. $H=O$	*sec.* $H=-R$
cos. $H=-R$	*cos. ver.* $H=R$
cot. $H=\pm\infty$	*cosec.* $H=\pm\infty$
sus. ver. $H=O$	

15. Continuando del mismo modo hallaremos para el arco $AELQ=\frac{3}{2}H$

sen. $\frac{3}{2}H=-R$	*sen. ver.* $\frac{3}{2}H=R$
tang. $\frac{3}{2}H=\pm\infty$	*sec.* $\frac{3}{2}H=\pm\infty$
cos. $\frac{3}{2}H=O$	*cos. ver.* $\frac{3}{2}H=2R$
cost. $\frac{3}{2}H=O$	*cosec.* $\frac{3}{2}H=-R$
sus. ver. $\frac{3}{2}H=R$	

Finalmente, para cuando el arco llegue á valer la circunferencia entera, tendremos

sen. $2H=O$	*sen. ver.* $2H=O$
tang. $2H=O$	*sec.* $2H=R$
cos. $2H=-R$	*cos. ver.* $2H=R$
cot. $2H=\pm\infty$	*cosec.* $2H=\pm\infty$
sus. ver. $2H=2R$	

16. Hasta aqui no hemos tratado mas que de los valores absolutos de las líneas trigonométricas correspondientes à un número exac-

to de cuadrantes: ahora pasaremos á tratar de los valores relativos que tienen las correspondientes á un número cualquiera de cuadrantes aumentado ó disminuido en el valor de un arco dado, comparados con los valores de las de este último arco, al cual llamaremos arco m.

Desde luego se sabe por la definicion de las colíneas que

$$sen.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=cos.\ m$$
$$sen.\ ver.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=cos.\ ver.\ m$$
$$tang.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=cot.\ m$$
$$sec.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=cosec.\ m$$

y por la inversa

$$cos.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=sen.\ m$$
$$cos.\ ver.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=sen.\ ver.\ m$$
$$cot.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=tang.\ m$$
$$cosec.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=sec.\ m$$

finalmente

$$sus.\ ver.\ (\tfrac{1}{2}\ H-m)=sen.\ ver.\ (\tfrac{1}{2}H+m)$$

Si se tratase de un arco mayor que un cuadrante v. g. el AEF (fig. 3), veríamos que su seno FG es lo mismo que el coseno del arco EF, que es ahora el m, pues es en lo que escede el cuadrante ABC el arco propuesto AEF. La tangente AM es igual con LK, porque los triángulos rectángulos MAO y KOL tienen iguales los catetos AO y LO, y ademas los ángulos en O como opuestos por el vértice: de donde resulta que los otros catetos AM y LK han de ser tambien iguales. Por esta misma igualdad son tambien iguales la secante OM del arco propuesto y la OK del arco LF; aunque en situacion opuesta respecto del diámetro AL: lo que sucede tambien á las tangentes AM y LK. En consecuencia, y atendiendo á que el arco EF, que llamaremos m, y el LF son complemento uno de otro, y que el último es tambien suplemento del AEF, tendremos

$$\begin{aligned}
&\textit{sen.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = \textit{cos.}\ m \\
&\textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}\ (H + m) = -\textit{cot.}\ m \\
&\textit{sec.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = -\textit{cosec.}\ m \\
&\textit{sen. ver.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = R + \textit{sen.}\ m \\
&\textit{sus. ver.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = \textit{sen. ver.}\ (\tfrac{1}{2}\ H - m)
\end{aligned}$$

Donde se ve que luego que el arco pasa de un cuadrante empiezan á disminuir sus líneas, escepto el seno verso que continua creciendo.

En cuanto á las colineas ó líneas del complemento, siendo EF el complemento, aunque por esceso de ABE, se tendrá, atendiendo à los variaciones de posicion,

$$\begin{aligned}
&\textit{cos.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = PF = -\textit{sen.}\ m \\
&\textit{cot.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = EN = -\textit{tang.}\ m \\
&\textit{cosec.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = ON = \textit{sec.}\ m \\
&\textit{cos. ver.}\ (\tfrac{1}{2}\ H + m) = EP = \textit{sen. ver.}\ m
\end{aligned}$$

17. Si en vez de referir el arco AEF al cuadrante ABE le refiriésemos á la semicir-

cunferencia AEL, y llamàsemos m á su suplemento LF, hallaríamos

seno (H—m)=FG=*sen.* m
sen. ver. (H—m)=AG=2R—*sen. ver.* m
tang. H—m)=AM=—*tang.* m
sec. (H—m)=OM=—*sec.* m
sus. ver. (H—m)=*sen. ver.* m
cos. (H—m)=FP=—*cos.* m
cos. ver. (H—m)—EP=*cos. ver.* m
cot. (H—m)=EN=—*cot.* m
cosec. (H—m)=ON=*sec.* m

Donde se ve que *todas las líneas ó colíneas de un arco son iguales en magnitud á las de su suplemento, escepto el seno verso y el suseno verso, y que solo varían de signo la tangente, la secante, el coseno y la cotangente.*

18. Si se tratase de un arco mayor que una semicircunferencia, como v. g. el AESN (fig. 2), se tendria llamando m al SN, y observando que los triàngulos rectángulos AOD y SOK son iguales por tener el cateto OS del uno, igual al OA del otro, y tener ademas iguales los ángulos en O, como opuestos por el vértice.

sen. (H+m)=MN=—sen. m
sen. ver. (H+m)=AM=2R—sen. ver. m
tang. (H+m)=AD=tang. m
sec. (H+m)=OD=sec. m.

cos. $(H+m)=OM=-\cos. m.$
cos. ver. $(H+m)=PQ=-\cos. \text{ver. } m.$
cot. $(H+m)=EG=\cot. m.$
cosec. $(H+m)=OG=-\text{cosec. } m.$

No se hace mencion del suseno verso, porque en pasando un arco de la semicircunferencia no tiene suplemento.

Debe aqui notarse respecto de la tangente y la secante como en el pàrrafo 13, que no pudiendo el radio tirado por el estremo N del arco AESN, encontrar á la tangente tirada por el orígen A de dicho arco, sino hácia la parte superior del diámetro AS, dichas lineas son como queda dicho AD y OD.

19. Si referimos el mismo arco AESN al AESQ compuesto de tres cuadrantes, y representamos por *m* al arco NQ, tendremos:

sen. $(\frac{3}{2}H-m)=MN=-\cos. m$
sen. ver. $(\frac{3}{2}H-m)=AM=2R-\cos. \text{ver. } m$
tang. $(\frac{3}{2}H-m)=AD=\cot. m.$
sec. $(\frac{3}{2}H-m)=DO=\text{cosec. } m$
cos. $(\frac{3}{2}H-m)=MO=-\text{sen. } m$
cos. ver. $(\frac{3}{2}H-m)=PQ=-\text{sen. ver. } m.$
cot. $(\frac{3}{2}H-m)=EG=\text{tang. } m$
cosec. $(\frac{3}{2}H-m)=OG=-\sec. m$

20. Para un arco mayor que tres cuadrantes, como v. g. el AESQR, se tendrá, llamando *m* al arco QR.

$\text{sen.}\ (\tfrac{3}{2}H+m)=RS=-\cos.\ m.$
$\text{sen. ver.}\ (\tfrac{3}{2}H+m)=AS=\cos.\ \text{ver.}\ m$
$\text{tang.}\ (\tfrac{3}{2}H+m)=AM=-\cot.\ m$
$\sec.\ (\tfrac{3}{2}H+m)=OM=\text{cosec.}\ m$
$\cos.\ (\tfrac{3}{2}H+m)=OS=\text{sen.}\ m$
$\cos.\ \text{ver.}\ (\tfrac{3}{2}H+m)=ET=2R-\text{sen. ver.}\ m.$
$\cot.\ (\tfrac{3}{2}H+m)=EN=QX=-\text{tang.}\ m$
$\text{cosec.}\ (\tfrac{3}{2}H+m)=ON=OX=-\sec.\ m$

Refiriendo el mismo arco AESQR à la circunferencia entera, y llamando *m* al arco AR, se tendrá:

$\text{sen.}\ (2H-m)=RS=-\text{sen.}\ m$
$\text{sen. ver.}\ (2H-m)=AS=\text{sen. ver.}\ m$
$\text{tang.}\ (2H-m)=AM=-\text{tang.}\ m$
$\sec.\ (2H-m)=OM=\sec.\ m$
$\cos.\ (2H-m)=OS=\cos.\ m$
$\cos.\ \text{ver}\ (2H-m)=EI=2R-\cos.\ \text{ver.}\ m$
$\cot.\ (2H-m)=EN=QX=-\cot.\ m$
$\text{cosec.}\ (2H-m)=ON=OX=-\text{cosec.}\ m$

21. A veces hay que considerar árcos, si asi pueden llamarse, mayores que la circunferencia entera; pero es fácil conocer que las lineas ó colineas correspondientes á un arco que vale una circunferencia mas *m* son las mismas que corresponden á dicho arco *m*; y que lo mismo sucederia si el arco se compusiese de un número cualquiera de circunferencias mas *m*.

22. En cuanto á los arcos negativos, tales como el AC, (fig. 4) que está situado respecto del orígen A en sentido opuesto que el AB; se ve que su seno, que aqui es CD, es tambien negativo é igual en magnitud á BD seno del arco AB: luego de aqui inferiremos que sen.—m=—sen. m, representando por *m* el arco sea cual fuere.

No sucede lo mismo con el coseno DO ni con el seno verso AD, los cuales no varian de uno á otro arco ni en magnitud ni en posicion, ni por consiguiente en signo: de modo que tendremos:

sen. ver.—m=sen. ver. m   cos.—m=cos. m

Continuando del mismo modo hallariamos que

tang.—m=—tang. m   sec.—m=sec. m
cot.—m=—cot. m   cosec.—m=—cosec. m
sus. ver—m=sus. ver. m

23. Por lo que precede (§§ 11 hasta el 22) se ve: 1.° Que una misma línea trigonométrica puede pertenecer á diferentes arcos: v. g. el seno de 20° es el mismo que el de 160°, como tambien, prescindiendo del signo, que el de 200.° y el de 340.°; y corresponde igualmente á los mismos arcos aumentados en cualquier número de circunferencias. 2.° Que los valores de las lineas trigonómetricas corres-

pondientes á cualquier número de cuadrantes son conocidos. Pero no son estas las únicas líneas trigonómetricas cuyo valor absoluto se puede conocer á primera vista, pues hay otras que se hallan en el mismo caso, como lo vamos á ver ahora.

TEOREMA.

24. *El seno de* 30° *vale la mitad del radio.*

Dem. En efecto siendo todo seno (§. 5.) igual á la mitad de la cuerda del arco duplo, el seno de 30° será igual á la mitad de la cuerda de 60°; pero siendo el arco de 60° la sesta parte de la circunferencia, su cuerda será igual al lado del exágono regular inscrito, y por consiguiente al radio: luego sen. $30^\circ=\frac{1}{2}R$.

Cor. De aquí se infiere que *el coseno y el seno verso de* 60° *valen la mitad del radio*: porque cos. $60^\circ=$sen. 30°: y como sen. ver.$=$ $R-$cos. (§. 8) será sen. ver. $60^\circ=\frac{1}{2}R$. Tambien se puede inferir de lo dicho valiéndose de la fórmula

$$sen.=\sqrt{R^2-cos.^2}$$

que sen. $60^\circ=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$, y por consiguiente cos. $30^\circ=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$. Procediendo de un modo analogo se hallaria que tang. $60^\circ=R\sqrt{3}$

TEOREMA.

25. *La tang. de* 45° *es igual al radio.*

Dem. Porque cuando el arco es de 45°, su seno y su coseno son iguales: luego suprimiendo esta cantidad comun en los dos términos de la espresion

$$\frac{R\times sen.}{cos.}$$

que corresponde á la tangente, quedará

$$tang.\ 45^{\circ}=\frac{R\times sen.\ 45^{\circ}}{sen.\ 45^{\circ}}=R.$$

Cor. De aqui se deduce que cot. $45^{\circ}=R$.

TEOREMA.

26. *El seno de 45° vale* $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$

Dem. En efecto, como entre el radio el seno y el coseno de un arco, forman un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es la primera de aquellas tres lineas, se tendrá siempre $R^2=sen.^2+cos.^2$ Pero cuando el arco sea de 45° como su seno y su coseno son iguales entre sí, se transformará dicha ecuacion en $R^2=2sens.^2\ 45^{\circ}$, de donde se deduce que

$$sen.\ 45^{\circ}=R\sqrt{\tfrac{1}{2}}=R\sqrt{\tfrac{2}{4}}=\tfrac{1}{2}R\sqrt{2}.$$

Cor. De aqui se infiere que el coseno de 45°
valdrá tambien $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$.

De la misma manera podrian hallarse los valores de algunas otras lineas; pero no nos detendremos mas en esto.

27. Hay tambien medios para determinar los valores de las lineas trigonométricas correspondientes á la suma ó diferencia de dos arcos (a) cuando se conocen las de estos: y para determinar igualmente los de las lineas trigonométricas correspondientes á algunos múltiplos ó partes alícuotas de otro arco dado, y para prueba de ello lo haremos ver resolviendo los problemas siguientes.

28. 1.ª *Dados los senos y cosenos de dos arcos hallar los correspondientes á la suma ó á la diferencia de dichos dos arcos.*

Resolucion. Sean los dos arcos AB, (fig. 5) que representaremos por A, y BC que llamaremos B; y colocàndoles uno à continuacion de otro como se ve en la figura, y tomando ademas desde B hácia atrás el arco BD=BC, serà el arco ABC la suma de los dos propuestos y el AD será la diferencia: luego si se bajan las perpendiculares CE y DG al radio OA será

$$CE=\text{sen.}\,(A+B) \qquad OE=\text{cos.}\,(A+B)$$
$$DG=\text{sen.}\,(A-B) \qquad OG=\text{cos.}\,(A-B)$$

(a) Parece inútil advertir que lo que se diga de los arcos se dice tambien de los ángulos medidos por ellos.

Si ahora se tira la cuerda CD y se la divide en dos partes iguales con el radio OB perpendicular à ella, y se baja ademas la perpendicular BF al radio OA, será

$$\begin{array}{ll} BF=sen.\ A & OF=cos.\ A \\ Ca=sen.\ B & Oa=cos.\ B \end{array}$$

Como lo que se quiere es hallar en valores de estas últimas cuatro lineas que son conocidas, los valores de las anteriores correspondientes á la suma ó diferencia de los arcos dados, tiraremos para conseguirlo una perpendicular *ab* desde el punto *a* al radio OA, y ademas las *ac* y Dd paralelas al mismo radio.

De aqui resulta que

$$\left.\begin{array}{l} sen.\ (A+B)=CE=Ec+Cc=ab+Cc \\ sen.\ (A-B)=DG=ab-ad=ab-Cc \end{array}\right\}(a)$$

Sin que haya dificultad en esto último, porque los triàngulos BdD y BcC son iguales, pues ambos tienen iguales sus hipotenusas como mitades de una misma cuerda, y sus ángulos agudos por correspondientes.

Queda pues redncida toda la dificultad de valuar los senos de la suma y diferencia de los dos arcos propuestos, á la de valuar las lineas *ab* y Cc: pero esto se cousigue fácilmente. En efecto, comparando entre sí los dos triàngulos semejantes OBF y Oab se tendrá

$$OB:BF::Oa:ab=\frac{BF\times Oa}{OB}=\frac{\textit{sen. } A \textit{ cos. } B}{R}$$

Comparando igualmente los dos triángulos OBF y Cca, cuya semejanza es indudable, pues que los tres lados del uno son respectivamente perpendiculares á los tres del otro, se tendrà

$$OB.OF::Ca:Cc=\frac{Ca\times OF}{OB}=\frac{\textit{sen. } B \textit{ cos. } A}{R}$$

Sustituyendo ahora estas espresiones finales de los valores de ab y Cc en las ecuaciones (a) resultará por último, notando que ambas espresiones tienen el mismo denominador.

$$\textit{sen. }(A+B)=\frac{\textit{sen. } A \textit{ cos. } B+\textit{sen. } B \textit{ cos. } A}{R}$$

$$\textit{sen. }(A-B)=\frac{\textit{sen. } A \textit{ cos. } B-\textit{sen. } B \textit{ cos. } A}{R}$$

Para hallar los valores de los cosenos observaremos que

$$\left.\begin{array}{l}\textit{cos. }(A+B)=OE=Ob-bE= \\ \quad Ob-ac \\ \textit{cos. }(A-B)=OG=Ob+bG= \\ \quad Ob+Dd=ab+ac\end{array}\right\}(b)$$

Falta ahora hallar los valores respectivos de las dos lineas Ob y ac, y para conseguirlo respecto de la primera, compararemos los dos triàngulos semejantes OBF y Oab que nos darán

$$OB:OF::Oa:Ob=\frac{OF\times Oa}{OB}=\frac{cos.\ A\ cos.\ B}{R}$$

Respecto de la segunda compararemos los triángulos OBF y Cca que nos darán

$$OB:BF::Ca:ac=\frac{BF\times Ca}{OB}=\frac{sen.\ A\ sen.\ B}{R}$$

y sustituyendo en las ecuaciones (b) resultará por último

$$cos.\ (A+B)=\frac{cos.\ A\ cos.\ B-sen.\ A\ sen.\ B}{R}$$

$$cos.\ (A-B)=\frac{cos.\ A\ cos.\ B+sen.\ A\ sen.\ B}{R}$$

Como en los càlculos trigonométricos se toma ordinariamente el radio por unidad se pueden suprimir los denominados de las fórmulas anteriores: con lo que, y reuniéndolas de dos en dos se reducirán á

$$sen.\ (A \pm B) = sen.\ A\ cos.\ B \pm sen.\ B\ cos.\ A$$
$$cos.\ (A \pm B) = cos.\ A\ cos.\ B \mp sen.\ A\ sen.\ B$$

29. Aunque se han sacado estas fórmulas suponiendo que la suma de los dos arcos propuestos sea menor que un cuadrante, se sacarian lo mismo cuando aquella suma tuviese cualquier otro valor: como puede verse en las figuras 6, 7 y 8, en la primera de las cuales la suma de los dos arcos AB y CB, es mayor que un cuadrante y menor que dos; en la segunda es mayor que dos y menor que tres; y en la tercera es mayor que tres y menor que cuatro; pero en estos casos es necesario tener presentes los signos que deben afectar, á los senos y cosenos segun los arcos á que corresponden. Asi en la figura 7 en que el arco AB es mayor que un cuadrante, su coseno OF será negativo; pero en este caso tendremos para hallar el seno de la suma de los dos arcos que

$$sen.\ (A+B) = CE = Cc - ab$$

y advirtiendo, que dicho seno CE es ahora negativo, tendremos cambiando los signos

$$sen.\ (A+B) = ab - Cc$$

y como $ab=sen.\ A\ cos.\ B$ y $Cc=-sen.\ B\ cos.\ A$ por ser *cos.* A una cantidad negativa, resulta verificado tambien en este caso que

$$sen.\ (A+B)=sen.\ A\ cos.\ B+sen.\ B\ cos.\ A$$

Del mismo modo se podrá comprobar la exactitud de dicha fórmula ó de cualquiera de las otras en los demas casos.

Cor. De lo dicho se infiere, que $sen.\ 2A=2\ sen.\ A\ cos.\ A$. Porque si en la fórmula

$$sen.\ (A+B)=sen.\ A\ cos.\ B+sen.\ B\ cos.\ A$$

se supone $A=B$ resultarà la anterior.

Tambien se infiere que $cos.\ 2A=cos^2A-sen^2A$

Porque haciendo $A=B$ en la fórmula del coseno de la suma de dos arcos, resultará la antedicha.

Si en las mismas fórmulas se supone $B=2A$ resultaràn las del seno y coseno de un arco triple de otro, que serán

$$sen.\ 3A=sen.\ A\ cos. 2A+sen.\ 2A\ cos.\ A$$
$$cos.\ 3A=cos.\ A\ cos. 2A-sen.\ A\ sen.\ 2A$$

ó sustituyendo en vez de *cos.* 2A y *sen.* 2A los valores que anteceden, y reduciendo se tendrá finalmente

$$sen.\, 3A = 3 sen.\, A\, cos.^2 A - sen.^3 A$$
$$cos.\, 3A = cos.^3 A - 3 sen.^2 A\, cos.\, A.$$

Sustituyendo en la primera de estas dos ecuaciones $1 - sen.^2 A$ en lugar de $cos.^2 A$, y en la segunda $1 - cos.^2 A$ en lugar de $sen.^2 A$, se obtendrán las siguientes

$$sen.\, 3A = 3\, sen.\, A - 4\, sen.^3 A$$
$$cos.\, 3A = 4 cos.^3 A - 3\, cos.\, A$$

Procediendo del mismo modo se podrian hallar los valores de los senos y cosenos de cualquier múltiplo de un arco dado, siempre que fuesen conocidos los correspondientes á dicho arco.

Problema 2.°

30. *Dado el seno de un arco, hallar el correspondiente á la mitad de dicho arco.*

Res. Sea ADB (fig. 9) el arco dado, cuyo seno es BE, y para hallar la mitad de dicho arco se tirará perpendicularmente á su cuerda AB un radio OD, el cual dividirá en dos partes iguales tanto á dicha cuerda como al arco ADB: de modo que será $BC = \frac{1}{2} AB$ y $BD = \frac{1}{2} ADB$. Pero como BC es el seno de BD, resulta que representando el arco dado ADB por la letra A tendremos

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A = BC = \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}\ \text{cuerda de } A$$

y sustituyendo ahora en lugar de cuerda de A su igual

$$\sqrt{2R\ sen.\ ver.\ A}\ \text{será}$$

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R \times sen.\ ver.\ A} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R(R - cos.\ A)}$$

Ejecutándo la multiplicacion indicada debajo del radical resultará

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\ cos.\ A}$$

Por último, sustituyendo en vez de *cos.* A su igual

$$\sqrt{R^2 - sen.^2 A},\ \text{será}$$

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - sen.^2 A}}$$

Cuando se toma el radio por unidad se reduce dicha fórmula á

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sqrt{1 - sen.^2 A}}$$

Con el fin de hacer alguna aplicacion de esta última fórmula, nos propondremos averiguar el valor del seno de 15°: y como 15 es la mitad de 30 tendremos

$$sen.\ 15^o = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-sen^2\ 30^o}}$$

Pero como el seno de 30° es igual á la mitad del radio que es lo que ahora nos sirve de unidad, será *sen.* 30° $=\frac{1}{2}$: por lo que sustituyendo en la ecuacion anterior se tendrá

$$sen.\ 15^o = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{\tfrac{3}{4}}} =$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

31. Por medio de las fórmulas halladas en los dos párrafos anteriores, es fàcil hallar tambien las de las otras lineas trigonométricas, ademas del seno y del coseno. Si por ejemplo quisiésemos hallar la de la tangente de la suma ó diferencia de dos arcos, representados el uno por A y el otro por B, como

$$tang. = \frac{R \times sen.}{cos.}$$

tendremos

$$tang.\ (A \pm B) = \frac{R \times sen.\ (A \pm B)}{cos.\ (A \pm B)}$$

ó poniendo en vez de *sen.*$(A \pm B)$ y *cos.*$(A \pm B)$ sus valores será

$$tang.\,(A \pm B) = \frac{R\,(sen.\,A\ cos.\,B \pm sen.\,B\ cos.\,A)}{cos.\,A\ cos.\,B \mp sen.\,A\ sen.\,B}.$$

Aunque en realidad está ya hallado el valor que buscábamos, sin embargo, si se le quiere espresar en valores de las tangentes trigonométricas de los arcos dados, se dividirán ambos términos del segundo miembro de la ecuacion anterior por *cos.* A *cos.* B, con lo que resultará

$$tang.\,(A \pm B) = \frac{R\left(\dfrac{sen.\,A\ cos.\,B}{cos.\,A\ cos.\,B} \pm \dfrac{sen.\,B\ cos.\,A}{cos.\,B\ cos.\,A}\right)}{1 \mp \dfrac{sen.\,A\ sen.\,B}{cos.\,A\ cos.\,B}}$$

Simplificando este resultado y teniendo presente que

$$\frac{sen.}{cos.} = \frac{tang.}{R}$$

se tendrá

$$tang.\,(A \pm B) = \frac{R\left(\dfrac{tang.\,A}{R} \pm \dfrac{tang.\,B}{R}\right)}{1 - \dfrac{tang.\,A\ tang.\,B}{R^2}}$$

de donde se deduce que

$$tang.\ (A \pm B) = \frac{\dfrac{tang.\ A \pm tang.\ B}{R^2 \mp tang.\ A\ tang.\ B}}{R^2}$$

y de aqui se infiere que

$$tang.\ (A \pm B) = \frac{R^2 (tang.\ A \pm tang.\ B)}{R^2 \mp tang.\ A\ tang.\ B}$$

Esta fórmula, tomando el radio por unidad como generalmente se acostumbra, se transforma en

$$tang.\ (A \pm B) = \frac{tang.\ A \pm tang.\ B}{1 \mp tang.\ A\ tang.\ B}$$

Haciendo $B = A$ se tendrá para la tangente de un arco duplo de otro la fórmula

$$tang.\ 2A = \frac{2\ tang.\ A}{1 - tang.^2 A}$$

32. Como $tang. = \frac{1}{cot.}$ se tendrá sustitu-

yendo en esta última ecuacion

$$\frac{1}{cot.(A\pm B)}=\frac{tang.\ A\pm tang.\ B}{1\mp tang.\ A\ tang.}$$

de la cual despejando *cot.* (A$\pm$B) sale esta otra

$$cot.\ (A\pm B)=\frac{1\mp tang.\ A\ tang.\ B}{tang.\ A\pm tang.\ B}$$

y sustituyendo tambien en el segundo miembro $\frac{1}{cot.}$ en lugar de tangente, resultará

$$cot.\ (A\pm B)=\frac{1\mp\frac{1}{cot.\ A\ cot.\ B}}{\frac{1}{cot.\ A}\pm\frac{1}{cot.\ B}}$$

la cual ejecutando las operaciones indicadas dará la siguiente

$$cot.\ (A\pm B)=\frac{\frac{cot.\ A\ cot.\ B\mp 1}{cot.\ A\ cot.\ A}}{\frac{cot.\ B\pm cot.\ A}{cot.\ A\ cot.\ B}}$$

y suprimiendo por último el divisor comun, *cot.* A *cot.* B en ambos términos, resultará finalmente

$$\cot.(A \pm B) = \frac{\cot. A \cot. B \mp 1}{\cot. B \pm \cot. A}$$

Lo mismo se podria hacer respecto de las demas lineas trigonométricas, pero no nos detendremos en ello.

33. Como todos los círculos son semejantes resulta de aqui que *las cuerdas de los arcos de un mismo número de grados tomados en círculos desiguales, son proporcionales con los radios de los mismos círculos*, como rectas homólogas ó tiradas de un mismo modo en dos figuras semejantes. Infiérese de aqui que *siendo los senos mitades de las cuerdas de los arcos duplos, tendrán tambien entre sí la misma razon que los radios.* Porque si llamamos R al radio mayor, r al menor, 2A al arco correspondiente al primero y 2a al correspondiente al segundo, se tendrá

$$\text{cuerda } 2A : \text{cuerda } 2a :: R : r$$

ó lo que quiere decir lo mismo

$$\tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2A : \tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2a :: R : r$$

pero $\frac{1}{2}$cuerda $2A = sen.\ A$, y $\frac{1}{2}$cuerda $2a = sen.\ a$, luego

$$R : r :: sen.\ A : sen.\ a \quad (1)$$

Como la proposicion está demostrada en general para cualquier arco, y como el coseno no es mas que el seno del complemento, lo está tambien para él; de modo que podemos estar seguros de que

$$R : r :: cos.\ A : cos.\ a \quad (2)$$

Para demostrar que se verifica lo mismo respecto de las tangentes observaremos que de la proporcion (1) se deduce esta otra:

$$R^2 : r^2 :: R\ sen.\ A : r\ sen.\ a$$

y dividiendo ordenadamente esta última por la (2) resultará

$$R : r :: \frac{R\ sen.\ A}{cos.\ A} : \frac{r\ sen.\ a}{cos.\ a} :: tang.\ A : tang.\ a$$

Por razones análogas á las dichas hace poco respecto del coseno, se debe mirar tambien como demostrado que

$$R : r :: cot.\ A : cot.\ a$$

Siendo $sec. = \frac{R^2}{cos.}$ se tendrá

$$sec.\ A : sec.\ a :: \frac{R^2}{cos.\ A} : \frac{r^2}{cos.\ a}$$

ó quitando divisores

$$sec.\ A : sec.\ a :: R^2\ cos.\ a : r^2\ cos.\ A$$

y sustituyendo en la razon compuesta R^2 *cos.* a: r^2 *cos.* A en vez de la componente *cos.* a:*cos.* A su igual r:R; será

$$sec.\ A : sec.\ a :: R^2 r : Rr^2 :: R : r$$

dividiendo por el factor comun Rr los dos términos de la segunda razon.

Del mismo modo que para los cosenos y cotangentes inferiremos de aqui que

$$R : r :: cosec.\ A : cosec.\ a$$

Pasando ahora al seno verso advertiremos que siendo

$$sen.\ ver.\ A = \frac{2 sen.^2 \frac{1}{2} A}{R},\ y\ sen.\ ver.\ a = \frac{2 sen.^2 \frac{1}{2} a}{r}$$

se sigue de aqui que se verificarà la siguiente proporcion

$$sen.\,ver.\,A : sen.\,ver.\,a :: \frac{2sen.^2\frac{1}{2}A}{R} : \frac{2sen.^2\frac{1}{2}a}{r}$$

ó quitando divisores y suprimiendo el 2

$$sen.\,ver.\,A : sen.\,ver.\,a :: r\,sen.^2\tfrac{1}{2}A : R\,sen.^2\tfrac{1}{2}a$$

Pero $sen.^2\frac{1}{2}A : sen.^2\frac{1}{2}a :: R^2 : r^2$ segun queda demostrado al principio de este párrafo, luego sustituyendo se tendrá

$$sen.\,ver.\,A : sen.\,ver.\,a :: R^2r : Rr^2 :: R : r$$

Lo mismo se verificará respecto de los cosenos versos por las razones ya manifestadas.

Respecto de los susenos versos las fórmulas

$$sus.\,ver.\,A = \frac{2cos.^2\frac{1}{2}A}{R},\ \text{y}\ sus.\,ver.\,a = \frac{2cos.^2\frac{1}{2}a}{r}$$

nos darán la proporcion

$$sus.\,ver.\,A : sus.\,ver.\,a :: \frac{2cos.^2\frac{1}{2}A}{R} : \frac{2cos.^2\frac{1}{2}a}{r}$$

ó suprimiendo el 2 y quitando divisores

$$\text{sus. ver. } A : \text{sus. ver. } a :: r \cos.^2 \tfrac{1}{2}A : R \cos.^2 \tfrac{1}{2}a$$

de donde por las mismas razones que para el seno verso, se deduce

$$\text{sus. ver. } A : \text{sus. ver. } a :: R^2 r : R r^2 :: R : r$$

De la formacion de las tablas.

31. Vista ya la utilidad que puede sacarse del uso de las lineas trigonométricas para la resolucion de los triángulos, se ve tambien desde luego la conveniencia ó casi necesidad que hay de tener unas tablas que contengan los valores de dichas líneas, no para todos los arcos imaginables, porque esto seria imposible, pero á lo menos para todos aquellos que consten de un número exacto de minutos. De este modo están calculadas las tablas de Lalande; pero otras lo están con mayor estension, esto es, contienen las líneas de mayor número de arcos. Citarémos entre ellas las de Callet que están calculadas para todos los arcos de diez en diez segundos.

Verdad es que las tablas de que acabamos de hacer mencion y las demas de que se hace uso en el dia, no contienen los valores de las lineas referidas sino sus logarítmos; pero bien se ve que sin conocer aquellos es imposible calcular estos: así, como que conocidos los primeros es fácil el cálculo de los segundos: por consiguiente lo que debemos ahora proponernos es, averiguar como será posible calcular dichos valores para las lineas de todos los arcos que consten de un número exacto de minutos ó de segundos: y desde luego nos concretaremos á la division de diez en diez segundos.

35. Lo primero en que debemos fijar nuestra atencion, es que con arreglo à lo dicho en el pàrrafo 8, averiguado el valor de cada seno en todos los arcos comprendidos entre 0° y 90° lo está tambien el de todas las demas lineas trigonométricas correspondientes á dichos arcos: y lo segundo en que si conociéramos el valor del seno de $10''$ hallariamos con facilidad el de los senos de 20 y 30 por medio de las fórmulas del seno de un arco duplo ó triple de otro: (§. 29 cor.); y de la misma manera, esto es, valiéndonos de dichas fórmulas y de las demas halladas que fuesen necesarias, podriamos obtener los valores de todos los senos propuestos de diez en diez segundos, sin que sea menester hacerlo mas que respecto de los arcos contenidos en el primer cuadrante, porque entre los límites sen. 0° y sen. $\frac{1}{2}$H se hallan comprendidos los valores de todos los senos.

Debemos observar ademas, que cuando se trate de un arco muy pequeño, su valor y el del seno que le corresponda se diferenciaràn en muy corta cantidad: y se acercarán tanto mas el uno al otro, cuanto menor sea el arco que se tome, hasta el punto de que la diferencia entre ambas cantidades podrá llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada. En efecto, si la diferencia entre el perímetro de un polígono inscrito en un círculo y la circunferencia de éste puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada (Man. de Geom. elem. §. 164 cor.) con mas razon lo será la que haya entre cada uno de los lados de dicho polígono y el arco que subtende, y aun mas la que haya entre las mitades de dichas cantidades. Pero las mitades de los lados son los senos correspondientes á las mitades de los arcos: lo que comprueba que efectivamente la diferencia entre un arco y su seno puede llegar à ser menor que cualquier cantidad dada. En consecuencia pues que hemos elegido un arco bastante pequeño cual es el de 10″, veamos si su diferencia con el seno es tal que se pueda despreciar.

Con este objeto buscaremos primero la longitud del arco de 10″ rectificado, la cual será igual à la de toda la circunferencia partida por el número de veces que quepa en ella el arco mencionado. Pero la circunferencia tiene 1.296,000 segundos, de donde se sigue que contiene 129,600 veces al arco de 10″: lo que quiere decir que el valor de este último será $\frac{1}{129{,}600}$ de aquella: y como el valor de la circunferencia aproximándole hasta las mil-billonésimas y tomando el radio por unidad, es 6.283,185,307.179,586, se tendrá la ecuacion

$$\text{arco de } 10'' = \frac{6\,283{,}185.307.179{,}586}{129{,}600}$$

que ejecutando la division da

$$\text{arco de } 10'' = 0{,}000.048{,}481.368{,}110 \text{ (a)}$$

36. Resulta de aquí que el seno de 10″ tiene que ser menor que esta cantidad, y solo falta por consiguiente hallar otra que haya de ser menor que el seno citado, para ver comparándola con la anterior hasta donde llega la aproximacion entre el verdadero valor del seno y el que se le supone, que es el del arco.

Para hacer esta investigacion empezarémos por notar que con arreglo á lo demostrado (Man. de Geom. elem. §. 164) toda tangente trigonométrica es mayor que el arco que le corresponde: de modo que si llamamos a al arco se tendrá: *tang.* a>a y *tang.* $\frac{1}{2}$a>$\frac{1}{2}$a: ó sustituyendo en vez de tangente su fórmula mas usual

$$\frac{sen.\ \frac{1}{2}a}{cos.\ \frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}a:$$

de donde se deduce que

$$sen.\ \tfrac{1}{2}a > \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}a$$

ó multiplicando por $2cos.\ \tfrac{1}{2}a$

$$2sen.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}\ a > a\ cos.^2\ \tfrac{1}{2}a$$

Pero $2sen.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}a$ equivale á $sen.\ a$ (§.29 Cor.); por consiguiente tendremos

$$sen.\ a > a\ cos.^2\ \tfrac{1}{2}a$$

y sustituyendo en vez de $cos.\ \tfrac{1}{2}a$ su igual

$$1 - sen.^2\ \tfrac{1}{2}a$$

$$sen.\ a > a - a\ sen.^2\ \tfrac{1}{2}a \quad (1)$$

Pero como $\tfrac{1}{2}a > sen.\ \tfrac{1}{2}a$, será tambien $\tfrac{1}{4}a^2 > sen.^2\ \tfrac{1}{2}a$ por lo que si en la desigualdad (1) se pone en vez de $sen.^2\ \tfrac{1}{2}a$ la cantidad $\frac{a^2}{4}$ su segundo miembro disminuirá todavia mas y será con mas razon

$$sen.\ a > a - \frac{a^3}{4}$$

37. Teniendo como tenemos ya calculado

en (a) el valor del arco a, que en este caso vale $10''$ no hay mas que hacer que sustituirle en la desigualdad anterior: y para hacer menos engorrosa la elevacion al cubo del valor de a, se tomará otro aproximado y mayor que él, tal como 0,00005, cuyo cubo es

$$0{,}000000000000125:$$

de donde resultará

$$\frac{a^3}{4}>0{,}00000000000032.$$

De esta manera al mismo tiempo que se abrevia algo la operacion, se puede estar seguro de que sen. a continua siendo mayor que

$$a-\frac{a^3}{4}$$

pues si lo era antes, con mas razon lo será ahora que hemos aumentado algo el sustraendo $\frac{a^3}{4}$

En consecuencia de lo dicho, y hecha la sustitucion mencionada, se tendrá

$$sen.\ 10''>0.000048481368110-0{,}00000000000032$$

ó ejecutando la sustraccion

$$sen.\ 10'' > 0{,}000048481368078$$

y como este valor empieza á diferir del valor (a) hallado para el arco (§. 35) en las diezbillonésimas, resulta comparándoles, que la diferencia entre uno y otro es menor que una diezbillonésima del radio. Pero siendo el sen. 10″ mayor que uno de estos valores y menor que el otro, aun será menor la diferencia que haya entre cualquiera de dichos dos valores y el del seno buscado: y por consiguiente en lugar de este último se podrá tomar el del arco.

38. Calculados los valores de los senos se calcularán los de los cosenos por medio de la fórmula

$$cos. = \sqrt{1 - sen.^2}$$

y en teniendo unos y otros se calcularán tambien fácilmente los de las demas líneas trigonomètricas por medio de las fórmulas respectivas; v. g. para las tangentes

$$tang. = \frac{sen.}{cos.}$$

para las cotangentes

$$cot = \frac{cos.}{sen.}$$

39. Lo dicho basta para dar á conocer la posibilidad de formar las tablas que contengan los valores de las líneas trigonométricas; por consiguiente, no diremos mas sobre este asunto, porqué el entrar en mas pormenores sería ya traspasar los límites á que debe ceñirse esta obra.

Formadas dichas tablas no presenta ninguna dificultad la formacion de las que se usan en la actualidad para evitar las multiplicaciones y divisiones, y qué como ya se ha dicho, no contienen los valores de las líneas trigonométricas sino sus logaritmos. En ellas debe notarse, que siendo todos los senos menos el del cuadrante, menores que el radio, y sucediendo lo mismo à todos los cosenos menos el del arco cero, y à otro gran número de líneas trigonométricas; si se continuase tomando el radio por unidad, los valores de muchas de dichas líneas serian quebrados, y por consiguiente sus logaritmos serian defectivos. Para evitar este inconveniente, y conseguir que solo resulten quebrados los valores de las líneas correspondientes á arcos de una pequeñez tal que no se puedan ofrecer nunca, en vez de tomar el radio por unidad se le considera compuesto de *diez mil millones* de unidades. De este modo se logra el objeto propuesto, pues aun cuando se tratase del arco de 10″, si su seno tomando el radio por unidad tiene el valor hallado (§. 37), cuando el radio valga diez mil millones de unidades, el valor de dicho seno será el ya citado multiplicado por 10000000000; esto es, será 484813,68.

Por lo dicho se vé, que de cualquier modo que se calculen las líneas trigonométricas, esto es, ya sea tomando el radio por unidad, ó ya tomando una parte alícuota suya, lo que espresan en realidad los valores hallados es la relacion que tiene cada una de dichas líneas con el radio.

De que este valga diez mil millones de unidades, se infiere que su logaritmo será 10 de característica, sin ninguna mantisa.

Nada diremos acerca de la disposicion particular de las tablas, porque no es la misma en todas ellas, y porque todas van precedidas de la competente esplicacion para su manejo; pero sí será bueno advertir, que aunque dichas tablas no contienen mas que los logaritmos de los senos cosenos, tangentes y cotangentes, (*), se pueden hallar con su auxilio los correspondientes á la demas lineas trigonométricas. En efecto la fórmula

$$sec.\ A = \frac{R^2}{cos.\ A}$$

(*) El ya citado D. José Mendoza y Rios calculó en sus tablas de logaritmos los correspondientes á los senos versos y susenos versos.

nos da *log. sec.* A$=$2*log.* R$-$*log. cos.* A; y la fórmula

$$cosec.\ A=\frac{R^2}{sen.\ A}$$

nos da *log. cosec.* A$=$2*log.* R$-$*log. sen.* A. En cuanto á los logaritmos de los senos versos y susenos versos, se podrán hallar por las fórmulas

$$sen.\ ver.\ A=\frac{2sen.^2\ \frac{1}{2}A}{R},\ sus.\ ver.\ A=\frac{2\ cos.^2\ \frac{1}{2}A}{R}$$

que nos dan *log. sen. ver.* A$=$*log.*2$+$2*log. sen.* $\frac{1}{2}$A$-$*log.* R, y *log. sus. ver.* A$=$*log.*2$+$2*log. cos.* $\frac{1}{2}$A$-$*log.* R

Resolucion de los triángulos rectangulos.

40. Queda manifestado (§. 4) que *los lados de cualquier triángulo tienen entre si la misma razon que las cuerdas de los arcos duplos de las medidas de los ángulos opuestos á los mismos*: de modo que si se representan por las letras a, b, c, los tres lados, y por A, B, C, los ángulos respectivamente opuestos se tiene

$$a:b:c::\text{cuerda } 2A:\text{cuerda } 2B:\text{cuerda } 2C$$

y como las mitades guardan entre sí la misma razon que los todos, será tambien

$$a:b:c :: \tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2A:\tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2B:\tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2C$$

Pero segun lo dicho al final del pàrrafo 5,

$$sen.\ A=\tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2A \quad sen.\ B=\tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2B$$

$$sen.\ C=\tfrac{1}{2}\text{cuerda } 2C$$

por lo que sustituyendo en la serie anterior resultará

$$a:b:c :: sen.\ A:sen.\ B:sen.\ C$$

lo que traducido al idióma vulgar, quiere decir, que *en todo triángulo los senos de los ángulos tienen entre sí la misma razon que los lados opuestos.* Esta proposicion se conoce con el nombre de analogía general.

41. Si uno de los ángulos, v. g. el C, fuese recto, su seno seria igual al radio, y entonces tendriamos

$$R:sen.\ B:sen.\ A :: c:b:a$$

y tomando dos de estas tres razones se obtendrán las proporciones siguientes

$$R : sen.\ A :: c : a$$

$$R : sen.\ B :: c : b$$

de donde se deducen las siguientes ecuaciones

$$c = \frac{Ra}{sen.\ A} = \frac{Rb}{sen.\ B} \quad (1)$$

$$a = \frac{c\ sen.\ A}{R} \quad (2)$$

$$b = \frac{c\ sen.\ B}{R} \quad (3)$$

$$sen.\ A = \frac{Ra}{c} \quad (4)$$

$$sen.\ B = \frac{Rb}{c} \quad (5)$$

La primera nos da el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en valores del radio, de uno de los catetos y del seno del àngulo opuesto à este. La segunda y tercera nos dan el valor de un cateto en valores del seno de su ángulo opuesto, de la hipotenusa y del radio. La cuarta y quinta nos dan el valor del seno de uno de los àngulos agudos en valores del cateto opuesto, del radio y de la hipotenusa.

Las dos proporciones que anteceden se traducen diciendo que *en todo triángulo rectángulo el radio es el seno de uno de los ángulos agudos como la hipotenusa es al cateto opuesto al mismo.*

Como en todo triàngulo rectángulo los dos ángulos agudos son el uno complemento del otro, se podrá sustituir *cos.* B en vez de *sen.* A y *cos.* A en vez de *sen.* B en las fórmulas anteriores, y se transformarán en

$$c=\frac{Ra}{cos.A}=\frac{Rb}{cos.B} \quad (6)$$

$$a=\frac{c\times cos.B}{R} \quad (7)$$

$$b=\frac{c\times cos.A}{R} \quad (8)$$

$$cos.B=\frac{Ra}{c} \quad (9)$$

$$cos.A=\frac{Rb}{c} \quad (10)$$

De la serie de razones iguales

$$R:sen.B:sen.A::c:b:a$$

se saca tembien la siguiente proporcion

$$sen.\ A : sen.\ B :: a : b$$

y como segun queda ya dicho, *sen.* B = *cos.* A, será tambien

$$sen.\ A : cos.\ A :: a : b$$

ó dividiendo ambos términos de la primera razon por *cos.* A

$$\frac{sen.\ A}{cos.\ A} : 1 :: a : b$$

y como $\frac{sen.}{cos.} = \frac{tang.}{r}$, se tendrá sustituyendo

$$\frac{tang.\ A}{R} : 1 :: a : b$$

de donde se deducen las ecuaciones

$$\frac{tang.\ A}{R} = \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad tang.\ A = \frac{Ra}{b} \quad (11)$$

$$a = \frac{b\ tang.\ A}{R} \quad (12) \qquad b = \frac{a\ tang.\ A}{R} \quad (13)$$

La primera de ellas vuelta á poner en proporcion, se podrá traducir diciendo, que *en todo triángulo rectángulo, el radio de las tablas es á la tangente de uno de los ángulos agudos, como el cateto adyacente á dicho ángulo es al cateto opuesto.* A esta proposicion y á la anterior relativa á los senos é hipotenusas, se les ha dado el nombre de *analogías.*

En las fórmulas (11) (12) y (13) se podria tambien cambiar *tang.* A en *cot.* B y *tang.* B en *cot.* A, por la razon dicha ya al tratar de los cosenos, y tanto ellas como las 10 anteriores se pueden traducir al lenguage comun y sacar otros tantos teoremas.

42. Pasemos ahora á hacer aplicacion de las fórmulas halladas, empezando por resolver un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea conocida, y en que se conozca tambien el valor de uno de los àngulos agudos ademas del recto.

Para proceder con órden y claridad se acostumbra colocar en columna los datos à un lado; y á otro las partes buscadas, formando otra columna: de modo que en el caso propuesto se hará como sigue

Datos.	P. B.
$c=420$	$B=26^\circ\ 40'$
$C=90^\circ$	$a=375,3$
$A=63^\circ\ 20'$	$b=185,5$

Lo mas fácil de hallar en este caso, porque no se necesita para ello de ninguna fórmula, es el ángulo B, como que ha de ser complemento del A: por consiguiente se obtendrá restando 63° 20′ de 90.° En cuanto á los valores de los catetos a y b se hallarán por las fórmulas (1) y (2) (§. 41): la primera de las cuales nos dará en el caso presente

$$\log.\ a = \log.\ sen.\ 63^\circ\ 20' + \log.\ 420 - \log.\ R.$$

Ejecutando estas operaciones tendremos

$$\begin{array}{l} 9{,}9511590 = \log.\ sen.\ 63^\circ\ 20' \\ \underline{2.6232492} = \log.\ 420 \\ 12.5744082 \\ \quad 2.5744082 = \log.\ 375{,}3 \end{array}$$

Tachando la decena que resulta en la característica, queda restado el logaritmo del radio que es 10.

Para averiguar el valor del otro cateto, tendremos

$$\begin{array}{l} 9.6520521 = \log.\ sen.\ 26^\circ\ 40' \\ \underline{2.6232492} = \log.\ 420 \\ 12.2753013 \\ \quad 2.2753013 = \log.\ 185{,}5 \end{array}$$

43. Propongamos ahóra resolver otro triángulo en que se conozca ademas del ángulo recto el valor de la hipotenusa y el de uno de los catetos, y tendremos:

Datos.	P. B
$c=490$	$A=27^\circ\ 12'\ 10''$
$a=224$	$B=62^\circ\ 47'\ 50''$
$C=90^\circ$	$b=435{,}8$

Para hallar el valor del ángulo A, nos valdremos de la fórmula (4) (§. 41); de la cual inferiremos que

$log.\ sen.\ A=log.\ R+log.\ 224-log.\ 490$; y como el logaritmo del radio no tiene mantisa y si solo 10 de característica, solo con añadir una decena á la característica del logaritmo de 224 estará hecha la suma: de modo que tendremos

$$\begin{array}{l} 12.3502480=log.\ R+log.\ 224 \\ \underline{\ \ 2.6901960=log.\ 490} \\ \ \ 9.6600520=log.\ sen.\ 27^\circ\ 12'\ 10'' \end{array}$$

Hallado el valor del àngulo A, solo con restarle de 90° resultarà el de B.

Para hallar el valor del cateto b nos valdremos de la fórmula (3) del párrafo ya citado, de la cual se deduce que

$$log.\ b = log.\ sen.\ 62^{\circ}\ 47'\ 50'' + log.\ 490 - log.\ R$$

$$\begin{array}{r} 9.9490835 = log.\ sen.\ 62^{\circ}\ 47'\ 50'' \\ 2.6901960 = log.\ 490 \\ \hline 12.6392795 \\ 2.6392795 = log.\ 435{,}8 \end{array}$$

Bueno será advertir que el valor de este lado se hubiera podido hallar tambien restando del cuadrado de 490 el de 224, y estrayendo la raiz cuadrada del resíduo; pues es sabido que todo cateto es igual á la raiz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.

Aunque para hallar el valor del seno de A hemos restado el logaritmo de 490 de la suma de los otros dos, generalmente se acostumbra en vez de restar ningun logaritmo añadir su complemento logarítmico, rebajando luego lo que deba rebajarse en el resultado; y aunque esto no ofrece una gran ventaja en los cálculos necesarios para la resolucion de los triángulos, en adelante nos someteremos al uso.

44. Pasemos ahora á resolver otro triángulo rectángulo cuyos dos catetos sean conocidos y hagamos el supuesto que se ve á continuacion:

Datos. **P. B.**

a=625	A=52° 45′ 54″
b=475	B=37° 14′ 6″
C=90°	c=785,1

Haciendo uso de la fòrmula (11) (§. 41) para obtener el valor del ángulo A, tendremos:

log. tang. A=*log.* R+*log.* 625+*comp. log.* 475:

por lo que haremos el cálculo como se ve á continuacion:

12.7958800=*log.* R+*log.* 625
 7.3233064
20.1191864

10.1191864=*log. tang.* 52° 45′ 54″

Rebajando á causa del complemento una de las dos decenas que hay en la característica de lo suma quedarà 10.1191864, que es el logaritmo correspondiente á la tangente de 52° 45′ 54.″ restando este resultado de 90° se obtiene el valor del otro ángulo agudo.

Para hallár el de la hipotenusa nos valdremos de la fórmula (1), y con arreglo à ella haremos el cálculo como aqui se ve:

$$\begin{array}{l} 12.7058800 = log.\ R + log.\ 625 \\ \underline{\ 0.0989994 = comp.\ log.\ sen.\ 52^{\circ}\ 45'\ 54''} \\ 12.8948794 \\ \qquad\qquad 2.8948794 = log.\ 785,1 \end{array}$$

y rebajando una decena á la característica de la suma, á causa del complemento, queda el logaritmo de 785,1 que es el valor de la hipotenusa.

45. Resolvamos finalmente otro triángulo rectángulo en que se conozca el valor de uno de los catetos y el de uno de los ángulos agudos: y hagamos con este objeto el supuesto siguiente:

Datos.	P. B.
b=840	B=21° 20′
A=68° 40′	a=2150,8
C=90°	c=2309

Lo primero y mas fácil de hallar en este caso es el àngulo B, porque ya sàbemos que conocido uno de los dos ángulos agudos, lo estan ambos.

Para hallar el cateto nos valdremos de la fórmula (12), y en consecuencia procederemos del modo siguiente:

$$
\begin{array}{r}
2.9242792 = \log.\ 840 \\
10.4083188 = \log.\ \mathrm{tang}.\ 68^{\circ}\ 40' \\
\hline
13.3325980 \\
3.3325980 = \log.\ 2150{,}8
\end{array}
$$

que tachada la decena de la característica para ejecutar la sustraccion del logaritmo del radio, resulta el correspondiente al número 2150,8.

La hipotenusa se puede hallar por la fórmula (1), como se ve á continuacion.

$$
\begin{array}{r}
12.9242792 \\
0.4391454 \\
\hline
13.3634246 \\
3.3634246 = \log.\ 2309.
\end{array}
$$

que corresponde, rebajada la decena, al número 2309.

Aplicacion de las fórmulas acabadas de hallar á la investigacion de otras nuevas.

Teorema.

46. *La suma de los senos de dos arcos es igual al duplo del seno de la semisuma de los mismos, multiplicado por el coseno de la semidiferencia.*

Dem. Sean los dos arcos el AC (fig. 10), que llamaremos A y el AD que llamaremos B, cuyos senos son CY y DN: y si prolongamos el DN hasta que vuelva á encontrar la circunferencia en otro punto, tal como F, será

$$FN{=}DN \qquad y\ AD{=}AF$$

De aqui se infiere, que si por el punto F se tira una paralela al diámetro AB hasta que encuentre al seno CY prolongado, será

$$CG{=}CY{+}YG{=}CY{+}FN$$

porque FN y GY son iguales como partes de paralelas interceptadas entre otras paralelas. Pero CY es el seno del arco A, y FN=sen. B, luego sustituyendo en la ecuacion anterior será

$$CG{=}\mathit{sen.}\ A{+}\mathit{sen.}\ B$$

Si se tira ahora la recta CF, el triángulo rectángulo CGF nos dará (§. 41)

$$CG{=}CF{\times}\mathit{cos.}\ FCG \qquad (a)$$

Pero el àngulo FCG tiene por medida la mitad del arco FM, el cual es igual à CD=A—B; y el lado CF es cuerda del arco CDAF, que es igual á CA+AF=A+B. Por consiguiente, CF=cuerda (A+B), y con arreglo á lo dicho

(§. 5) CF=2sen. $\frac{1}{2}$(A+B): por lo que sustituyendo este valor, el de FCG y el de CG en la ecuacion (a) se tendrá

$$sen.A+sen.B=2sen.\tfrac{1}{2}(A+B)\,cos.\tfrac{1}{2}(A-B)\ (b)$$

Escol. Lo mismo se demostraria la proposicion aun cuando alguno de los arcos fuese mayor que un cuadrante, como si por ejemplo fuesen el ACL y el AB: porque entonces tomando tambien el arco AF=AD y tirando las FL y FP se tendria *sen.* A+*sen.* B=LP: y como LP=FC×*cos.*FLP y ademas el arco FACL=A+B, y el FQ=A—B, se verificará igualmente que

$$sen.A+sen.B=cuerda\,(A+B)\,cos.\tfrac{1}{2}(A-B)$$

ó por último

$$sen.A+sen.B=2sen.\tfrac{1}{2}(A+B)\,cos.\tfrac{1}{2}(A-B)$$

Del mismo modo se podria continuar suponiendo tambien mayor que un cuadrante el ángulo B, ó suponiendo uno de ellos ó ambos mayores que dos ó tres cuadrantes.

Teorema.

47. *La diferencia de los senos de dos arcos es igual al duplo del coseno de la semisuma de*

los mismos, multiplicado por el seno de la semidiferencia.

Dem. Sean los dos arcos $AC=A$ y $AD=B$ (fig. 10), y hecha la construccion anterior y tirando ademas la cuerda CD, se tendrá $sen.\ A - sen.\ B = CE$. Pero $CE = \text{cuerda } CD \times cos.\ DCE$: y como el arco $CD=A-B$, y el ángulo DCE tiene por medida la mitad del arco $MAD = A+B$, se tendrá sustituyendo

$$sen.\ A - sen.\ B = \text{cuerda } (A-B)\ cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B)$$

ó finalmente

$$sen.\ A - sen.\ B = 2\ cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ sen.\ \tfrac{1}{2}(A-B) \quad (d)$$

Aqui se puede hacer la misma observacion que en el escolio anterior.

Cor. De aqui se infiere que

$$\frac{sen.\ A + sen.\ B}{sen\ A. - sen.\ B} = \frac{tang.\ \frac{1}{2}(A+B)}{tang.\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

pues dividiendo la ecuacion (b) del párrafo 46 por la (d) resultarà

$$\frac{sen.\ A + sen.\ B}{sen.\ A - sen.\ B} = \frac{sen.\ \frac{1}{2}(A+B)\ cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{cos.\ \frac{1}{2}(A+B)\ sen.\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

Pero $$\frac{sen.\ \frac{1}{2}(A+B)\ cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{cos.\ \frac{1}{2}(A+B)\ sen.\ \frac{1}{2}(A-B)}=$$

$$\frac{sen.\ \frac{1}{2}(A+B)}{cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}\times\frac{cos.\ \frac{1}{2}(A-B)}{sen.\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

y como $\frac{sen.}{cos.}=tang.$ y $\frac{cos.}{sen.}=cot.$ será

$$\frac{sen.\ A+sen.\ B}{sen.\ A-sen.\ B}=tang.\ \tfrac{1}{2}\,(A+B)\times cot.\ \tfrac{1}{2}\,(A-B)$$

y por último

$$\frac{sen.\ A+sen.\ B}{sen.\ A-sen.\ B}=\frac{tang.\ \frac{1}{2}(A+B)}{tang.\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

por ser $cot.=\frac{1}{tang.}$

Teorema.

48. *La suma de los cosenos de dos arcos es igual al duplo del coseno de la semisuma de dichos arcos, multiplicado por el coseno de la semidiferencia.*

Dem. Sean como en el teorema anterior

los arcos $AC=A$ y $AD=B$, y tendremos $\cos. A = OY$ y $\cos. B = ON$: y como si se tira por el punto D la recta DS paralela al diámetro AB y se baja la perpendicular SR será $OR = ON$, resulta que

$$\cos. A + \cos. B = OY + ON = OY + OR$$

pero $$OY + OR = SE$$

luego $$\cos. A + \cos. B = SE$$

Tirando ahora la recta CS cuerda del arco $CLS = H - A - B$, y atendiendo á que el ángulo CSD tiene por medida la mitad del arco $CD = A - B$, resultará

$$\cos. A + \cos. B = \text{cuerda } (H - A - B) \cos. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

ó sustituyendo en lugar de la cuerda el duplo del seno de la mitad del arco

$$\cos. A + \cos. B = 2 \operatorname{sen.} \tfrac{1}{2}(H - A - B) \cos. \tfrac{1}{2}(A - B)$$

Pero $$\operatorname{sen.} \tfrac{1}{2}(H - A - B) =$$
$$\operatorname{sen.} [\tfrac{1}{2}H - \tfrac{1}{2}(A + B)] = \cos. \tfrac{1}{2}(A + B).$$

por lo que volviendo á sustituir en la espresion anterior, se tendrá por último

$$\cos. A + \cos. B = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(A + B) \cos. \tfrac{1}{2}(A - B) \quad (e)$$

TEOREMA.

La diferencia de los cosenos de dos arcos es igual al duplo del seno de la semisuma de los mismos arcos, multiplicado por el seno de la semidiferencia.

Dem. Refiriéndonos siempre á los mismos arcos AC y AD (fig. 10) será

$$cos.\ B - cos.\ A = ON - OY = YN = DE$$

Pero $\quad DE = CD \times sen.\ DCE$

y como $\quad CD = \text{cuerda}\ (A-B) = 2sen.\ \frac{1}{2}(A-B)$,

y el ángulo DCE tiene por medida (§. 47) $\frac{1}{2}(A+B)$, se tendrá haciendo las sustituciones

$$cos.\ B - cos.\ A = 2sen.\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ sen.\ \tfrac{1}{2}(A-B) \quad (f)$$

50. Las fórmulas halladas en los párrafos 46, 47, 48 y 49, se podrian tambien hallar por calculo; y para prueba de ello, nos propondremos hallar la (b) (§. 46).

Con este fin recordaremos que si espresamos por A′ y B′ dos arcos cualesquiera, tendremos en virtud de lo dicho (§. 28),

$$sen.\ (A'+B') = sen.\ A'\ cos.\ B' + sen.\ B'\ cos.\ A'$$

$$sen.\ (A'-B') = sen.\ A'\ cos.\ B' - sen.\ B'\ cos.\ A'$$

y sumando las dos ecuaciones se obtendrá esta otra

$$sen.\,(A'+B')+sen.\,(A'-B')=2\,sen.\,A'\,cos.\,B'\ (1)$$

Si ahora representamos la suma $A'+B'$ de los dos arcos por A, y la diferencia $A'-B'$ por B el mayor A' serà igual á $\frac{A+B}{2}$ y el menor $B'=\frac{A-B}{2}$: con lo que sustituyendo en la ecuacion (1) se trasformará en

$$sen.\,A+sen.\,B=2\,sen.\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,cos.\,\tfrac{1}{2}(A-B)$$

que es la misma fórmula (b).

Análogamente se podrian hallar las otras.

Resolucion de los triangulos oblicuangulos.

51. El caso mas sencillo que nos puede ocurrir en la resolucion de los triángulos oblicuángulos, es cuando conocemos un lado y dos ángulos, ya sean los adyacentes á dicho lado, ó ya sean uno de los adyacentes y el opuesto: pues entonces basta por sí sola la analogía general (§. 40) para ejecutar la resolucion.

Si por ejemplo tuviesemos que resolver un triángulo con los datos siguientes:

Datos.	P. B.
a=870	C=71° 24′
A=66° 24′	b=637,7
B=42° 12′	c=899,8

advertiriamos lo primero que el tercer àngulo se halla inmediatamente, restando de 180° la suma de los otros dos. En seguida para hallar el lado *b* hariamos uso de la analogía citada diciendo

$$sen.\ 66°\ 24' : sen.\ 42°\ 12' :: 870 : b$$

y ejecutándo el càlculo por logaritmos seria

2.9395192=*log.* 870
9.8271887=*log. sen.* 42° 12′
0.0379326=*comp. log. sen.* 66° 24′
12.8046405
2.8046405=*log.* 637,7

Que tachando la decena resulta corresponder al número 637.7

Para calcular el valor del lado *c* no hay mas que hacer, que sustituir en el cálculo anterior *log. sen.* 71° 24′ en lugar de *log. sen.* 42° 12′, como es muy fàcil conocer: por lo que tendremos

$$\begin{array}{l} 2.9395192 = \log.\ 870 \\ 9.9767022 = \log.\ sen.\ 71^\circ\ 24' \\ 0.0379326 = comp.\ \log.\ sen.\ 66^\circ\ 24' \\ \hline 12.9541540 \\ 2.9541540 = \log.\ 899{,}8 \end{array}$$

Que tachada la decena corresponde al número 899,8

52. Como conocido el valor de dos ángulos de un triángulo lo está tambien el del tercero, resulta que aun cuando los dos ángulos que se nos diesen fuesen los adyacentes al lado conocido, se podria resolver el triàngulo de la misma manera, como se verá en el ejemplo siguiente:

Datos.	P. B.
a=946	A=55° 2′
B=68° 25′	b=1073,4
C=56° 33′	c=963,2

Restando de 180° la suma de los dos ángulos B y C se tendrá el valor de A, y en seguida continuaremos como en el ejemplo anterior, segun aqui se ve:

9.9684286=*log. sen.* 68° 25′
2.9758911=*log.* 946
0.0864587=*comp. log. sen.* 55° 2′

13.0307784

3.0307784=*log.* 1073,4

Que tachada la decena corresponde al número 1073,4

9.9213572=*log. log. sen.* 56° 33′
2.9758911=*log.* 946
0.0864587=*comp. log. sen.* 55° 2′

12.9837070

2.9837070=*log.* 963,2

Que tachada la decena corresponde al número 963,2

53. Si los datos de que se pudiese disponer para resolver un triángulo, fuesen dos de sus lados y el ángulo opuesto al uno de ellos, será tambien suficiente la analogía general para la resolución. En efecto, si se nos ocurriese un caso tal como el siguiente

Datos.	P. *B.*
a=824	B=45° 19′ 29″
b=618	C=26° 40′ 31″
A=108° 32′	c=390,2

como los tres datos pueden entrar en una misma proporcion tendriamos por ella

$$824 : 618 :: sen.\ 108^\circ\ 32' : sen.\ B$$

y haciendo el cálculo como se ve á continuacion

$$\begin{array}{l}
9.9768720 = log.\ sen.\ 108^\circ\ 32' \\
2.7909884 = log.\ 618 \\
\underline{7.0840728 = comp.\ log.\ 824} \\
19.8519332 \\
\\
9.8519332 = log.\ sen.\ 45^\circ\ 19'\ 29''
\end{array}$$

Que tachada la decena corresponde al seno de $45^\circ\ 19'\ 29''$

Sumando ahora el valor de este ángulo con el del A y restando la suma de 180° se tendrá el tercer ángulo C; y para hallar el valor del lado *c* haremos el cálculo como aqui se ve:

$$sen.\ 108^\circ\ 32' : sen.\ 26^\circ\ 40'\ 31'' :: 824 : c$$

$$\begin{array}{l}
9.6521966 = log.\ sen.\ 26^\circ\ 40'\ 31'' \\
2.9159272 = log.\ 824 \\
\underline{0.0231280 = comp.\ log.\ sen.\ 108^\circ\ 32'} \\
12.5912518 \\
\\
2.5912518 = log.\ 390{,}2
\end{array}$$

De donde resulta que el lado *c* vale 390,2

54. En el ejemplo anterior el ángulo conocido era el opuesto al lado mayor de los dados; pero si hubiese sido el opuesto al lado menor hubiera habido dos triángulos con los mismos datos, como lo vamos á hacer ver.

Sea el triángulo ABC (fig. 11), y si haciendo centro en el vértice C con un radio AC=b, se traza un arco hasta cortar en otro punto A′ el lado AB=c, y se tira la A′C, será A′C=AC=b, y se originará otro triángulo A′BC dentro del primitivo; pero con la circunstancia de que ambos tienen comunes el lado BC y el ángulo B, y ademas segun se acaba de decir, el lado A′C del uno igual AC del otro: de modo que los datos propuestos en la cuestion convienen tanto al uno como al otro de dichos triángulos. Por esta misma razon se llama *dudoso* á este caso, y no pudiendo estar la duda mas que entre dos triángulos, no se resuelve uno solo, sino que se resuelven ambos.

Propongamos el ejemplo siguiente:

Datos.	P. B,	P. B.
a=1742	A=81° 46′ 54″	A′=98° 13′ 6″
b=1645	C=29° 3′ 6″	C′=12° 36′ 34″
B=69° 10′	c=856	c′=384,2

A consecuencia de la analogía general tenemos

$$log.\ sen.\ A = log.\ sen.\ B + log.\ 1742 - log.\ 1645:$$

por lo que haremos el cálculo como sigue

$$\begin{array}{l} 9.9706346 = log.\ sen.\ 69^\circ\ 10' \\ 3.2410482 = log.\ 1742 \\ \underline{6.7838341} = comp.\ log.\ 1645 \\ 19.9955169 \\ 9.9955169 = log.\ sen.\ 81^\circ\ 46'\ 54'' \end{array}$$

De donde resulta que el ángulo A vale 81° 46′ 54″; y de aqui que el A′ vale 98° 13′ 6″, pues siendo contiguos dichos ángulos han de ser suplemento uno de otro.

Sumando el valor de Á con el de B y restando la suma de 180°, resultará el valor de C que es 29° 3′ 6″: y haciendo lo mismo con los de A′ y B se hallará el de C′, que es de 12° 36′ 34″.

Para hallar el lado *c* nos valdremos de la proporcion

$$sen.\ A : sen.\ C :: 1742 : c$$

y haremos el cálculo como sigue

9.6869586=*log. sen.* 29° 3′ 6″
3.2410482=*log.* 1742
0.0044831=*comp. log. sen.* 81° 46′ 54″

12.9324899

2.9324899=*log.* 856

Que nos da para *c* el valor 856.

Del mismo modo procederemos para hallar el lado *c′* valiéndonos del ángulo C′, por lo que el cálculo será

9.3390618=*log. sen.* 12° 36′ 34″
3.2410482=*log.* 1742
0.0044831=*comp. log. sen.* 81° 46′ 31″

12.5846311

2.5846311=*log.* 384,2

De donde resulta que *c′* vale 384,2

55. Cuando los datos que se tengan sean dos de los lados del triángulo, y el ángulo formado por los mismos, no bastará por sí sola la analogía general para la resolucion ; pues dichos tres datos no pueden entrar en una misma proporcion, en atencion á que el ángulo que se conoce no es el opuesto á ninguno de los lados conocidos. No pudiendo servirnos directamente para nuestro intento dicha analogía,

observaremos à lo menos que de ella se deduce la siguiente proporcion.

$$a+b : a-b :: sen.\ A+sen.\ B : sen.\ A-sen.\ B.$$

De donde resulta

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{sen.\ A+sen.\ B}{sen.\ A-sen.\ B}\ (1)$$

Pero segun queda dicho (§. 47. Cor.)

$$\frac{sen.\ A+sen.\ B}{sen.\ A-sen.\ B}=\frac{tang.\ \frac{1}{2}(A+B)}{tang.\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

y sustituyendo en la ecuacion (1) serà

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tang.\ \frac{1}{2}(A+B)}{tang.\ \frac{1}{2}(A-B)}\ (2)$$

Atendiendo àhora á que la suma de los tres àngulos de todo triàngulo rectilíneo ha de valer 180^{o} ò H, inferiremos que $A+B=H-C$, y del mismo modo

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}H-\tfrac{1}{2}C$$

de lo que se deduce que

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B)=tang.\ \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}H-\tfrac{1}{2}C)=cot.\ \tfrac{1}{2}C$$

por lo que sustituyendo en la ecuacion (2) se tendrá

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{cot.\ \frac{1}{2}C}{tang.\ \frac{1}{2}(A-B)}$$

que despejando *tang.* $\frac{1}{2}$(A—B) da

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{(a-b)\ cot.\ \frac{1}{2}C}{a+b} \quad (3)$$

y en consecuencia

$$log.\ tang.\ \tfrac{1}{2}(A-B)=$$
$$log.\ cot.\ \tfrac{1}{2}C+log.\ (a-b)-log.\ (a+b)$$

Por este medio podremos llegar á descubrir la diferencia que haya entre dos ángulos de un triángulo siempre que se conozcan los dos lados opuestos y el tercer ángulo : y como la suma de los mismos es igual á H—C, se podrá hallar el valor de cada uno de ellos, pues el mayor será igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y el menor será igual á la diferencia de las mismas mitades.

Luego que se conozca el valor de los tres ángulos se hallará fácilmente el tercer lado por la analogía general.

Hagamos ahora aplicacion de lo dicho á la resolucion del siguiente problema.

Datos.	P. B.
$a=1260$	$A=58^\circ\ 27'\ 34''$
$b=1008$	$B=42^\circ\ 52'\ 26''$
$C=78^\circ\ 40'$	$c=1452,6$

La suma de los lados conocidos es 2268 y su diferencia 252: por consiguiente segun la fórmula (3) tendremos

$$\log.\ \tan g.\ \tfrac{1}{2}(A-B)=$$

$$\log.\ 252+\log.\ \cot.\ 39^\circ\ 20'-\log.\ 2268$$

y haciendo el cálculo

$$\begin{array}{l} 10.0864709=\log.\ \cot.\ 39^\circ\ 20' \\ \ \ 2.4014005=\log.\ 252 \\ \ \ \underline{6.6443569}=comp.\ \log.\ 2268 \\ 19.1322283 \end{array}$$

$$9.1322283=\log.\ \tan g.\ 7^\circ\ 47'\ 34''$$

Que tachando la decena corresponde á la tangente de $7^\circ\ 47'\ 34''$: por consiguiente

$$\tfrac{1}{2}(A-B)=7^\circ\ 47'\ 34''$$

y como

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}\ H-\tfrac{1}{2}C$$

será en este caso

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=90^\circ-39^\circ\ 20'=50^\circ\ 40'$$

Sumando este último valor con el de $\tfrac{1}{2}(A-B)$ resulta 58° 27′ 34″ que es del ángulo mayor A, y restando el de $\tfrac{1}{2}(A-B)$ del otro resulta 42° 52′ 26″, que es el valor del ángulo menor B.

Falta solamente hallar el tercer lado c, lo que se conseguirá como en los casos anteriores por la analogía general: por consiguiente el cálculo será

9.9914478=*log. sen.* 78° 40′
3.0034605=*log.* 1008
0.1672440=*comp. log. sen.* 42° 52′ 26″
13.1621523

3.1621523=*log.* 1452,6

Que tachada la decena corresponde al número 1462,6.

56. La averiguacion de lo que vale el tercer lado c se puede hacer con menos trabajo.

por medio de otra fórmula á que nos conducirà tambien la analogía general. En efecto, de la serie de razones iguales

$$a:b:c::sen.\ A:sen.\ B:sen.\ C$$

se deduce la siguiente proporcion

$$a-b:c::sen.\ A-sen.\ B:sen.\ C$$

de la cual se infiere que

$$c=\frac{(a-b)\ sen.\ C}{sen.\ A-sen.\ B}$$

Pero $\qquad sen.\ C=2sen.\ \tfrac{1}{2}C\ cos.\ \tfrac{1}{2}C$

(§. 29 *cor.*), y

$$sen.\ A-sen.\ B=2cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ sen.\ \tfrac{1}{2}(A-B)$$

(§. 46), por lo que haciendo las sustituciones correspondientes en la espresion anterior del valor de *c* se transformará en

$$c=\frac{2(a+b)\ sen.\ \tfrac{1}{2}C\ cos.\ \tfrac{1}{2}\ C}{2\ cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ sen.\ \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

Suprimiendo el 2 en ambos términos y teniendo presente que

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=\tfrac{1}{2}H-\tfrac{1}{2}C$$

se reducirá esta espresion á la siguiente:

$$c=\frac{(a-b)\ sen.\tfrac{1}{2}C\ cos.\tfrac{1}{2}C}{sen.\tfrac{1}{2}C\ sen.\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

y suprimiendo *sen.* $\tfrac{1}{2}$C en ambos miembros, se tendrá por último

$$c=\frac{(a-b)\ cos.\tfrac{1}{2}C}{sen.\tfrac{1}{2}(A-B)}$$

Como en esta espresion del valor de *c* entra el factor a—b cuyo logaritmo está ya buscado para averiguar el valor de la *tang.* $\tfrac{1}{2}$(A—B), resulta que por este medio no hay mas que buscar que dos logaritmos, el de *cos.* $\tfrac{1}{2}$C y el de *sen.* $\tfrac{1}{2}$(A—B): en vez de que para el cálculo anterior hubo que buscar tres, el de *sen.* C, el *b* y el de *sen.* B.

57. Cuando los datos sean los tres lados no nos bastará tampoco la analogía general, pues los tres datos no pueden entrar todos en una misma proporcion y por consiguiente cualquiera que se formase habia de tener dos términos no conocidos.

En consecuencia para ver si podemos encontrar alguna fórmula que nos dé á conocer alguna línea trigonométrica de cualquiera de los ángulos en valores de los lados, recordaremos que segun se demuestra en la Geometria elemental (Man. §. 155 cor.) si desde el vértice del ángulo mayor de un triángulo tal como ABC (fig. 12) se baja una perpendicular al lado opuesto se verificará que

$$c:a+b::a-b:BD-AD$$

lo que da

$$BD-AD=\frac{a^2-b^2}{c}$$

Llamando ahora S al segmento mayor BD y s al menor AD, será

$$S-s=\frac{a^2-b^2}{c}$$

y como $S+s=c$ resulta que

$$S=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c} \quad \text{y } s=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$$

Ahora como S es cateto del triángulo rectángulo BCD, cuya hipotenusa es *a*, resultará (§. 41 for. 9) que

$$cos.\ B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\ (1)$$

Esta fórmula nos da ya á conocer el valor del coseno de uno de los ángulos en valores de los lados, pero bajo una forma que no se presta al cálculo logarítmico, por lo que veremos de transformarla en otra.

Con este objeto restaremos ambos miembros de la unidad y tendremos

$$1-cos.\ B=1-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

Sustituyendo en vez de $1-cos.\ B$ su igual *sen. ver.* B y reduciendo todo el segundo miembro à quebrado se tendrá

$$sen.\ ver.\ B=\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2ac}$$

que puede tambien escribirse como sigue

$$sen.\ ver.\ B=\frac{b^2-(a-c)^2}{2ac}$$

ó finalmente

$$sen.\ ver.\ B=\frac{(b+a-c)\ (b+c-a)}{2ac}\quad(2)$$

Por medio de esta fórmula puede conocerse ya el valor del ángulo B cuando se haga uso de tablas que contengan los logaritmos de los senos versos, y para cuando no las haya se transformará la misma en esta otra, por ser (§. 10)

$$sen.\ ver.\ B=2sen.^2\ \tfrac{1}{2}\ B$$

$$2sen.^2\ \tfrac{1}{2}B=\frac{(b+a-c)\ (b+c-a)}{2ac}$$

de donde resulta tambien

$$sen.^2\ \tfrac{1}{2}B=\frac{(b+a-c)\ (b+c-a)}{4ac}$$

y finalmente

$$sen.\ \tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a-c)\ (b+c-a)}{ac}}\quad(3)$$

Tambien hubieramos podido añadir la unidad á los dos miembros de la ecuacion (1) y nos habria dado las siguientes

$$1+\cos.\ B=1+\frac{a^2+c^2-b}{2ac}$$

$$sus.\ ver.\ B=\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$sus.\ ver.\ B=\frac{(a+c)^2-b^2}{2ac}$$

$$sus.\ ver.\ B=\frac{(a+b+c)(a+c-b)}{2ac}\quad(4)$$

Esta se transformará para poder hacer uso de las tablas comunes en

$$2\cos.\ \tfrac{1}{2}B=\frac{(a+b+c)\,(a+c+b)}{2ac}$$

y por último

$$\cos.\ \tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)\,(a+c-b)}{ac}}\quad(5)$$

Del mismo modo se puede sacar de la espresion $s=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$ la siguiente:

$$\cos. A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

y de aqui estas otras

$$sen.\ ver.\ A=\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{2bc}$$

$$sus.\ ver.\ A=\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)}{2bc}$$

las cuales pueden servir para hallar el valor del àngulo A, sirviéndose de tablas que contengan los logaritmos de los senos y susenos versos; y cuando no las haya podràn servir las fórmulas

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{bc}}\ (6)$$

$$cos.\ \tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)\ (b+c-a)}{bc}}\ (7)$$

que se deducen de las que les preceden, de la misma manera que las correspondientes al ángulo $\tfrac{1}{2}B$ halladas antes.

Conocidos estos dos ángulos se halla al momento el tercero restando la suma de aquellos de 180°.

58. Si dividimos ordenadamente la ecuacion (6) por la (7) y la (3) por la (5) resultarà

$$tang.\ \tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (a+c-b)}{(a+b+c)\ (b+c-a)}}\ (8)$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(a+b-c)\ (b+c-a)}{(a+b+c)\ (a+c-b)}}\ (9)$$

Examinando con atencion las fórmulas que hemos hallado, veremos que la (4) correspondiente al suseno verso es preferible á todas las demas (2) (3) (5) y (9) en el caso de que no se quiera hallar por este camino mas que uno de los ángulos tal como B, pero cuando por este medio, esto es, valiéndose de las fórmulas, se hayan de buscar los dos ángulos A y B, las (8) y (9) son las que ofrecen mas ventajas, por cuanto las cantidades que entran en la espresion del valor de cada una de las tangentes de $\frac{1}{2}$A y $\frac{1}{2}$B son las mismas, aunque colocadas algunas de diverso modo; y por consiguiente una vez buscados los cuatro logaritmos necesarios para calcular la primera de dichas tangentes, no es preciso buscar ningun otro para calcular la segunda; pero como la colocacion es diferente, habrá que hacer uso una vez del logaritmo de una cantidad, y otra del complemento logarítmico de la misma.

59. Todo esto se entenderá mejor haciendo aplicacion de lo dicho á la resolucion de un triángulo: por lo que nos propondremos uno cuyos datos se espresan à continuacion.

Datos.	P. B.
$a=450$	$A=32^\circ\,29'\,59''$
$b=600$	$B=45^\circ\,45'\,28''$
$c=820$	$C=101^\circ\,44'\,33''$
$1870=a+b+c$	

La fórmula (4) del párrafo anterior nos darà despues de hallados los valores de $a+b-c$, $a+c-b$ y $b+c-a$, y sustituidos en ella:

$$log.\ sus.\ ver.\ B = log. R + log.\ 1870 + log.\ 670 - log.\ 2 - log.\ 450 - log.\ 820.$$

Pero como $log.\ R - log.\ 2 = 9.6989700$ es una cantidad constante que ha de entrar siempre en estos cálculos, se puede decir tambien que

$$sus.\ ver.\ B = 9.6989700 + log.\ 1870 + log.\ 670 - log.\ 450 - log.\ 820.$$

por lo que procederemos à ejecutar las operaciones como se ve à continuacion.

$9.6989700 = log.\ R - log.\ 2$
$3.2718416 = log.\ 1870 = log.\ (a+b+c)$
$2.8260748 = log.\ 670 = log.\ (a+c-b)$
$7.3467875 = comp.\ log.\ 450 = comp.\ log.\ a$
$7.0861862 = comp.\ log.\ 820 = comp.\ log.\ c$
30.2298601

$10.2298601 = log.\ sus\ ver.\ 45^{o}\ 45'\ 28''$

Despues de escritos convenientemente y sumados todos los logaritmos y complementos logarítmicos que han de entrar en el cálculo, resulta la suma 30.2298601, de la cual habrá que rebajar dos decenas por los dos complementos logarítmicos de que se ha hecho uso, y queda únicamente 10.2298601, que es el logaritmo del suseno verso de 45° 45′ 28″: luego este es el valor del ángulo en B.

A falta de tablas que contengan los logaritmos de los senos y susenos versos, se podrá buscar el resultado por las tablas comunes, teniendo presente que

$$\textit{sus. ver. } B = \frac{2 \cos.^2 \frac{1}{2} B}{R}$$

de donde se deduce que

$$\textit{log. cos. } \tfrac{1}{2} B = \frac{\textit{log. sus. ver. } B + \textit{log. } R - \textit{log. } 2}{2}$$

que quiere decir que al logaritmo 10.2298601 hallado antes se le añade 9.6989700, diferencia entre el logaritmo de 2 y el del radio, y se toma la mitad de la suma, con lo que se tendrá el logaritmo de *cos.* $\frac{1}{2}$B, como se ve ejecutado á continuacion:

$$\begin{array}{l} 10.2298601 = \textit{log. sus. ver. } 45^\circ\ 45'\ 28'' \\ \ \ 9.6989700 = \textit{log.} R - \textit{log. } 2 \\ \hline 19.9288301 \\ \ \ 9.9644150 = \textit{log.cos. } 22^\circ\ 52'\ 44'' \end{array}$$

Hallado el ángulo B se puede, si se quiere, hallar el valor de A por la analogia general, de la que deduciremos, sustituyendo valores:

$$\textit{log. sen. } A =$$

$$\textit{log. sen. } 45^\circ\ 45'\ 28'' + \textit{log.} 450 - \textit{log.} 600$$

y haciendo el cálculo

$$\begin{array}{l} 9.8551535 = \textit{log. sen.}\ 45^\circ\ 45'\ 28'' \\ 2.6532125 = \textit{log.} 450 \\ \underline{7.2218488 = \textit{comp. log.}\ 600} \\ 19.7302148 \end{array}$$

$$9.7302148 = \textit{log. sen.}\ 32^\circ\ 29'\ 59''$$

Sumando ahora los valores de los dos ángulos hallados, y restando la suma de 180° se tendrá el valor del tercer ángulo C, que en el presente ejemplo es de 101° 44′ 32″.

Si se hubiera querido hallar por separado cada uno de los ángulos A y B, se hubiera podido hacer, ó valiéndose de cualquiera de las fórmulas ya halladas para los senos versos y susenos versos, ó para los cosenos y tangentes, Las primeras ofrecen la ventaja de dar desde luégo el valor de los ángulos buscados, en vez de que las segundas no dan sino el de sus mitades; pero en cambio las fórmulas (8) y (9) relativas à las tangentes tienen la ventaja de que se componen de las mismas cantidades; aunque diferentemente colocadas algunas de ellas. Para dar un ejemplo de ello resolveremos el mismo triángulo, valiéndonos de dichas fórmulas (8) y (9); teniendo presente que

$$a+c-b=670 \qquad a+b-c=230$$
$$b+c-a=970 \qquad \text{y } a+b+c=1870$$

22.8260748 = *log.* R² + *log.* 670
2.3617278 = *log.* 230
7.0132283 = *comp. log.* 970
6.7281584 = *comp. log.* 1870

38.9291893
18.9291893

9.4645946 = *log. tang.* 16° 14′ 59,5″

Hallada la suma 38.9291893 se rebajan dos decenas por razon de los dos complementos logarítmicos, y tomando luego la mitad resulta el logaritmo de *tang.* $\frac{1}{2}$A

Para hallar el valor del ángulo B tendremos

22.3617278 = *log.* R² + *log.* 230
2.9867717 = *log.* 970
7.1739252 = *comp. log.* 670
6.7281584 = *comp. log.* 1870

39.2505831
19.2505831

9.6252915 = *log. tang.* 22° 52′ 44″

60. Las fórmulas de que hemos hecho uso en este párrafo se pueden escribir de otra manera si se representa por 2s la suma de los tres lados del triangulo, pues entonces las (2) y (4) se transforman en

$$sen.\ ver.\ B=\frac{(2s-2c)\ (2s-2a)}{2ac}=\frac{2(s-c)\ (s-a)}{ac}$$

$$sus.\ ver.\ B=\frac{2s(2s-2b)}{2ac}=\frac{2s\ (s-b)}{ac}$$

Las fórmulas (3) y (5) se reducirian á

$$sen.\ \tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(2s-2c)\ (2s-2a)}{ac}}=$$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4(s-c)\ (s-a)}{ac}}=\sqrt{\frac{(s-c)\ (s-a)}{ac}}$$

$$cos.\ \tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{4s(s-b)}{ac}}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$$

Finalmente la fórmula (9) se reduciria á

$$tang.\ \tfrac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(2s-2c)\ (2s-2a)}{2s\ (2s-2b)}}=\sqrt{\frac{(s-c)\ (s-a)}{s(s-b)}}$$

Para el ángulo A serian

$$sen.\ ver.\ A = \frac{2(s-c)\,(s-b)}{bc}$$

$$sus.\ ver.\ A = \frac{2s\,(s-a)}{bc}$$

$$sen.\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-c).(s-b)}{bc}}$$

$$cos.\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\ A = \sqrt{\frac{s(s-c).\ (s-b)}{s(s-a)}}$$

61. Tambien se podria resolver el triángulo en este caso, esto es, cuando se conoce los tres lados, resolviendo uno de los dos triángulos rectángulos en que queda dividido el total por la perpendicular; v. g. el BCD, en el cual se conoce la hipotenusa BC y el cateto BD por la fórmula

$$S = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$$

(§. 55). Por este medio se obtendria el valor del ángulo B, y en seguida el de A por la analogia general, y el de C fundándose en que la suma de los tres ha de ser igual á dos rectos.

62. Advertiremos por último antes de concluir la Trigonometria rectilínea, que cuando suceda encontrarse en algun otro tratado con una fórmula desconocida, el mejor medio que se presenta para cerciorarse de su exactitud, es sustituir en lugar de las espresiones que entren en ella, las equivalentes que nos sean conocidas, ejecutar las operaciones que resulten indicadas, y hacer las reducciones necesarias hasta conseguir la transformacion.

Si por ejemplo se nos presentase la fórmula

$$sen.\ (A+B)\ sen.\ (A-B) = sen.^2\ A - sen.^2\ B$$

sustiriamos en lugar de

$$sen.\ (A+B)\ \text{y}\ sen.\ (A-B)$$

las espresiones que nos son ya conocidas; con lo que nos resultaria

$$(sen.\ A\ cos.\ B + sen.\ B\ cos.\ A)\ (sen.\ A\ cos. B -$$

$$sen.\ B\ cos.\ A = sen.^2\ A - sen.^2\ B$$

Pero ejecutando la multiplicacion indicada en el primer miembro se tendria

$$(sen.^2 A\ cos.^2 B - sen.^2 B\ cos.^2 A) =$$

$$sen.^2 A - sen.^2 B$$

sustituyendo ahora en vez de $cos.^2$ B y $cos.^2$ A sus iguales $1 - sen.^2$ B y $1 - sen.^2$ A y ejecutando las multiplicaciones obtendriamos

$$sen.^2 A - sen.^2 A\ sen.^2 B - sen.^2 B + sen.^2 A\ sen.^2 B =$$

$$sen.^2 A - sen.^2 B$$

la cual es verdadera, porque el segundo y el cuarto tèrmino del primer miembro se destruyen uno á otro.

TRIGONOMETRIA ESFÉRICA.

63. Queda dicho (§. 2) que *Trigonometría esférica es la que trata de la resolucion de los triángulos esféricos*, y que estos son *los formados sobre la superficie de una esfera por tres arcos de círculos máximos de la misma.* ACM (fig. 13) es un triángulo esférico, y aunque en rigor con arreglo á la definicion dada ADBCM es otro triángulo esférico, como conocidas las partes del uno lo están tambien las del otro, no se consideran en la Trigonometría esférica mas triángulos que aquellos cuyos lados son menores que una semicircunferencia.

Lo primero que debe llamar nuestra atencion en estos triángulos, es que *todos ellos determinan en el centro de la esfera un ángulo triedro cuyas partes son las mismas que las del triangulo*: esto es: los ángulos planos que componen el ángulo triedro tienen por medida á los lados del triángulo esférico, y los ángulos diedros formados por las caras de aquel son iguales à los ángulos del triángulo.

Sea el triàngulo ABC (fig. 14), cuyos lados designaremos con las letras *a*, *b*, *c*, y tirando al centro de la esfera O los radios AO, BO y CO se ve que el arco *a* es la medida del ángulo plano BOC, el *b* es la medida del AOC y el *c* lo es del AOB. En cuanto á los tres àngulos A, B, C. se ve tambien que son los mismos que forman respectivamente entre sí los planos AOB y AOC; AOC y BOC; AOB y BOC. Estos ángulos se pueden medir por los que forman entre sí las tangentes tiradas por sus vértices á los arcos que los forman; pues se sabe por la Geometria elemental, que todo ángulo diedro es igual á el formado por dos perpendiculares levantadas en un mismo punto à la interseccion de las dos caras.

Si los lados *a* y *b* fuesen dos cuadrantes, dichas tangentes serian respectivamente paralelas á los radios OA y OC, y por consiguiente el àngulo formado por aquellas seria igual á el formado por estos; pero la medida de este último es el arco *c*, tercer lado del triángulo: luego *cuando un ángulo de un triángulo esférico está formado por dos cuadrantes, su medida es el lado opuesto.*

64. De que todo triángulo esférico determine en el centro de la esfera un ángulo triedro cuyas partes son iguales á las del triángulo, se deducen varias consecuencias ó corolarios muy

importantes, de los que espondrémos á continuacion los siguientes.

1.° *La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo esférico es mayor qne el tercero: de modo qne siempre tendremos*

$$a+b>c \qquad b+c>a \qquad a+c>b$$

Porque en todo ángulo triedro la suma de dos ángulos planos es mayor que el tercero.

2.° *La diferencia de dos lados ha de ser menor que el tercero.* Porque de las tres desigualdades anteriores se infiere tambien que

$$b>c-a \qquad c>a-b \qquad a>b-c$$

3.° *La distancia mas corta entre dos puntos tomados en la superficie de una esfera es el arco de círculo máximo que pasa por ellos.*

Porque sean los dos puntos A y B (fig. 15) y si se tira del uno al otro el arco AB de círculo máximo, y otra curva cualquiera tal como ACB, se podrán tirar á cualquier punto de esta última, v. g. desde los otros dos A y B, dos arcos de círculos máximos AC y BC; y resultará por lo dicho en el corolario primero que $AC+BC>AB$, continuando del mismo modo tendriamos

$$AE+CE>AC \qquad CN+BN>BC$$

de donde se deduce que será con mas razon

$$AE+CE+CN+BN>A\ B$$

y como á medida que se aumente el número de estos arcos irà creciendo la suma de sus valores, y el conjunto de ellos se va aproximando á la curva ACB, resulta que esta es mayor que el arco AB.

4.º *Si desde un punto* v. g. D, *tomado dentro de un triángulo esférico* ABC (fig. 16) *se conciben dos arcos* AD y BD *tirados á los vértices* A y B *de dos de los ángulos, la suma de dichos arcos será menor que la de los lados* BC y AC *opuestos á los ángulos espresados.* Porque si se prolonga uno de los arcos, v. g. BD, hasta que encuentre en E al lado opuesto, se tendrá $AD<AE+DE$, y añadiendo á ambos miembros una misma cantidad BD y simplificando, será

$$AD+BD<AE+BE$$

Pero $BE<CE+BC$: luego si sustituimos en la espresion anterior, se tendrá con mas razon

$$AD+BD<AE+CE+BC$$

y finalmente simplicando el segundo miembro

$$AD+BD>AC+BC$$

5.º *La suma de los tres lados de un triángulo esférico vale siempre menos de* 2H ó 360º. Porque segun se demuestra en la Geometria elemental, la suma de los tres ángulos planos que forman un ángulo triedro tiene que valer menos de cuatro ángulos rectos.

6.º *Todo ángulo de un triángulo esférico tiene que valer menos de* 180º. Porque lo mismo se verifica en los ángulos diedros de que consta el triedro.

TEOREMA.

65. *Si dos triángulos esféricos trazados sobre una misma esfera tienen sus lados respectivamente iguales, tendrán tambien iguales sus ángulos, y por consiguiente serán iguales.*

Dem. Porque si dos ángulos triedros están formados por ángulos planos iguales, serán tambien iguales los ángulos diedros formados por los planos homólogos; y como estos ángulos son los mismos de los triángulos, queda demostrada la proposicion.

TEOREMA.

66. *Si dos triángulos esféricos trazados sobre una misma esfera tienen iguales dos de sus lados y los ángulos formados por los mismos serán iguales.*

Dem. Llamemos *a*, *b*, *c*, á los lados de uno de los triángulos, y *m*, *n*, *p* á los del otro: y si se verifican las condiciones enunciadas en el teorema, el ángulo tiedro determinado por el uno se podrá ajustar exactamente con el determinado por el otro, de modo que los lados *a* y *b* se confundan con los *m* y *n*; de donde resultará que los terceros lados *c* y *p* quedarán tambien confundidos, y por consecuencia los ángulos adyacentes.

Teorema.

67. *Si dos triángulos esféricos trazados sobre una misma esfera tienen un lado del uno igual á un lado del otro, é iguales tambien los ángulos adyacentes á los mismos, serán iguales.*

Dem. Porque verificadas estas condiciones se podrian ajustar tambien los dos àngulos triedros determinados por ambos triàngulos, de manera que estos últimos se confundiesen uno con otro.

Esc. Aunque hemos demostrado todos estos casos de igualdad, contrayéndonos á triángulos trazados sobre una misma esfera, es fácil conocer que lo mismo se verificarán respecto de los trazados sobre esferas distintas, pero cuyos radios fuesen iguales.

Bueno será advertir tambien que para que haya esta igualdad total en los triángulos esféricos es necesario ademas que las partes iguales esten semejantemente dispuestas, pues á no ser asi resultará la igualdad por simetría.

Teorema.

68. *Si dos triángulos esféricos trazados sobre una misma esfera ó esferas iguales tienen dos lados iguales y el ángulo formado por ellos es desigual en ambos, los terceros lados serán tambien desiguales, siendo mayor el que se oponga al ángulo mayor.*

La demostracion se da del mismo modo que para los triángulos rectilíneos.

Teorema.

69. *Si desde un punto tomado en la superficie de una esfera, se tiran á la parte mas próxima de la circunferencia de un círculo máximo un arco perpendicular y varios oblícuos, se verificará:* 1.º *El perpendicular será mas corto que cualquiera de los oblícuos:* 2.º *Los oblícuos que disten igualmente del perpendicular serán iguales entre sí:* 3.º *De dos oblícuos situados á diferente distancia del perpendicular, el que mas distare será mas largo.*

Dem. Porque si suponemos que sea BB′D′B (fig, 17) el círculo máximo, y C el punto desde donde se hayan tirado á la parte mas próxima el arco CD perpendicular y los CF, CB, CB′ oblícuos: si prolongamos el CD hasta que sea $C'D=CD$ y se tira ademas el C′B, los triángulos CBD y C′BD serán iguales por tener el lado BD comun, $CD=C'D$, é iguales tambien los ángulos comprendidos CDB y C′DB por ser ambos rectos. De aqui se sigue que $CB=C'B$. Pero por lo demostrado (§. 64 cor. 3.º) sabemos que

$$CB+C'B>CC'$$

ó tomando las mitades

$$CB>CD$$

que es lo primero que se trataba de demostrar.

Si el arco CB′ dista tanto del perpendicular como el CB será $BD=B'D$, y por consiguiente los dos triángulos CBD y CB′D serán iguales, pues tienen ademas comun el lado CD é iguales los ángulos en D por rectos: luego $CB=CB'$ con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

Si se tira ahora el arco C′F, será $CF=C'F$ por la igualdad de los triángulos CFD y C′FD; pero por lo demostrado (§. 64 cor. 4.º) sabemos que

$$CF+C'F>CB+C'B$$

ó lo que es lo mismo

$$2CF>2CB$$

de donde se deduce finalmente que

$$CF > CB$$

con lo que queda demostrado que el arco que se separa mas del perpendicular es mas largo que el otro.

Cor. De aqui se infiere, que cuando se tiren estos arcos à la parte mas distante de la circunferencia propuesta, *el perpendicular* CD′ *será el mas largo*, como que es suplemento de un arco CD mas corto que los CB y CH. Tambien se infiere por la misma razon, que *el oblícuo que se separe mas del perpendicular será el mas corto.*

Teorema.

70. *En todo triángulo esférico tal como* ABC (fig. 18) *á lados iguales se oponen ángulos iguales.*

Dem. Porque si $a=b$ y bajamos desde C el arco CD al punto medio entre los A y B, los dos triángulos ACD y BCD tendrán los tres lados del uno iguales á los tres del otro: luego serán iguales y darán A=B.

Cor. 1.º De lo dicho se infiere *que un arco bajado desde el vèrtice de un triángulo isósceles al punto medio del lado opuesto, es perpendicular á dicho lado.* Porque siendo iguales entre sí los dos triángulos ACD y BCD, los dos ángulos en

D serán tambien iguales; y como entre los dos han de valer dos rectos, será recto cada uno de ellos.

Cor. 2.º Tambien se infiere que *si un triángulo esférico es equilátero, será tambien equiángulo.*

TEOREMA.

71. *En todo triángulo esférico á ángulos iguales se oponen lados iguales.*

Dem. Sea el triángulo ABC (fig. 19) en el que suponemos que los ángulos en B y en A son iguales; y si no lo fuesen tambien los lados opuestos podriamos tomar en el mayor, que supondremos ser *a* una parte BD=AC, y tirando el arco AD resultaria un nuevo triángulo ABD que tendria un lado comun con el ABC, á saber, el BA: ademas el lado BD=AC por construccion, y el ángulo en B=CAB por el supuesto. De aqui se sigue que los dos triángulos BDA y ABC deberian ser iguales por lo dicho (§. 67), pero siendo esto un absurdo, porque el uno de ellos está contenido dentro del otro, el supuesto que nos ha conducido á esta consecuencia debe ser absurdo tambien; y como este supuesto fue que los lados *b* y *c* fuesen desiguales, resulta que no pueden serlo sino que precisamente ha de ser *b*=*c*.

Cor. De aqui se infiere, que *si un triángulo esférico es equiángulo, será tambien equiláte-*

ro. Porque de ser A=B se deduciria que $a=b$ y de ser A=C se deduciria tambien que $a=c$ y por consiguiente seria tambien $b=c$.

TEOREMA.

72. *En todo triángulo esférico á mayor ángulo se opone mayor lado.*

Dem. Sea el triàngulo ABC, (fig. 19) en el cual suponemos que A>B. Resulta de esto que si formamos en A un ángulo DAB=B, el triángulo DAB tendrá tambien iguales los dos lados AD y BD. Pero

$$AD+CD>AC$$

y sustituyendo en lugar de AD su igual BD será

$$BD+CD>AC$$

ó lo que es lo mismo BC>AC.

TEOREMA.

73. *En todo triángulo esférico á mayor lado se opone mayor ángulo.*

Dem. Supongamos que fuese el lado $a>b$, y si el ángulo A no fuese mayor que B ó seria menor, ó serian iguales ambos. Menor no puede ser, porque si fuese $A<B$, por lo demostrado en el teorema anterior habia de ser tambien $a<b$; lo que es contra el supuesto: tampoco puede ser $A=B$, pues entonces seria tambien $a=b$, lo que es contra el supuesto: luego no pudiendo ser A igual ni menor que B serán iguales ambos ángulos.

Teorema.

74. *Si dado un circulo de una esfera tal como* LHNP (fig. 13) *se concibe un diámetro* AB *de la misma que sea perpendicular al plano de dicho círculo, cada uno de los estremos del diámetro espresado estará igualmente distante de todos los puntos de la circunferencia del círculo.*

Dem. Porque si desde el punto A se tiran rectas á varios puntos de la circunferencia LHNP, y desde el centro Q del círculo se tiran radíos á los mismos puntos, los triángulos rectángulos que se originen tendrán comun el cateto AQ, y los demas serán iguales por radios de un mismo círculo: luego las hipotenusas de todos estos triángulos serán tambien iguales entre sí. Pero estas hipotenusas son las cuerdas de los arcos que van desde el punto A á los puntos de la circunferencia LHNP: por consiguiente estos arcos son iguales, y como ellos son los que miden la distancia del punto

A á los de la circunferencia del círculo, queda demostrada la proposicion.

Lo mismo se puede decir respecto del punto B, por consiguiente podemos estar seguros de que la proposicion se verifica respecto de ambos puntos, y ya sea el círculo de que se trate, un cìrculo menor, como el LHNP, ó ya fuese un círculo máximo como el CMDR.

A estos puntos que como A y B estàn igualmente distantes de todos los de la circunferencia de un círculo de la esfera, se les dá el nombre de *polos* de dicho círculo; y para hallarlos no hay mas que hacer que levantar en dos puntos de la circunferencia del círculo dado dos arcos que le sean perpendiculares, y los puntos en que estos se corten por la parte superior è inferior serán los polos buscados.

Cuando el círculo de que se trate sea máximo, los polos distarán un cuadrante de todos los puntos de su circunferencia.

Teorema.

75. *Si la distancia de un punto* A (fig. 13), *situado en la superficie de una esfera á otros dos puntos de ella, tales como* C y M *es igual á un cuadrante, dicho punto* A *será el polo del círculo que pase por los dos puntos* C y M.

Dem. Tírense al centro de la esfera los radios OC y OM, y como los arcos AC y AM son cuadrantes, los ángulos AOC y AOM serán rectos; lo que nos dice que la recta AO, que es perpendicular á las dos rectas OC y OM que se cruzan por su pie en el plano del círculo, lo es tambien à dicho círculo: luego por lo demostrado (§. 74) sus estremos A y B serán los polos del mismo.

Teorema.

76. *Si haciendo centro en los vértices* A B y C *de un triángulo esférico con una magnitud igual á la cuerda de un cuadrante, se trazan los arcos de círculo máximo* EF DF y DE *hasta que se encuentren; los tres vértices del nuevo triángulo que resulte, serán los polos de los lados del triángulo primitivo* (fig. 20).

Dem. Por lo demostrado en el teorema anterior tenemos que siendo AG y AM cuadrantes, el punto A es el polo del arco EF; y por la misma razon el punto C lo es del arco DE. De aqui se sigue, que las distancias AE y CE son tambien cuadrantes, y que el punto E es por consiguiente el polo del arco AC: y como se podria proceder del mismo modo respecto de los puntos D y F queda demostrada la proposicion.

Por esta causa se da à dichos triángulos la denominacion de triángulos *polares* el uno del otro.

Bueno será advertir que aunque ademas del triángulo DEF se pueden formar otros por la interseccion de los arcos DE, EF y DF, aqui no tomaremos en consideracion mas que el triángulo central.

Teorema.

77. *Los ángulos de un triángulo esférico son suplementos de los lados de su triángulo polar*; y recíprocamente *los lados del primero son suplementos de los ángulos del segundo.*

Dem. Sean los mismos triángulos del teorema anterior, y tendremos que por ser AG y AM dos cuadrantes, el arco GM será la medida del ángulo A (§. 75). Ademas cada uno de los arcos FG y EM es tambien un cuadrante: lo que dará la ecuacion $EM+FG=H$. Pero el primer miembro de ella se puede descomponer en $EG+2GM+MF$; ó en el equivalente $EF+GM$ y por consiguiente tendremos $EF+GM=H$; de donde se deduce por último

$$EF=H-GM$$

Sustituyendo ahora en lugar de GM su igual A será

$$EF=H-A$$

con lo queda demostrado que el ángulo A y el lado EF son suplemento uno de otro, y lo mismo se haria para cualquiera de los otros dos ángulos B y C.

Tambien tenemos que por ser DP y DN dos cuadrantes, será PN la medida del ángulo en D, de manera que PN=D; y como BP y CN son tambien cuadrantes, resulta que

$$CN+BP=H$$

pero en lugar de CN+BP se podrá sustituir PN+BC, ó D+BC, y será entonces

$$D+BC=H$$

De donde resulta BC=H—D: con lo que queda demostrada la segunda parte de la proposicion.

Por esta razon se da tambien al triángulo polar la denominacion de triángulo *suplementario.*

Teorema.

78. *Dos triángulos esféricos trazados sobre una misma esfera ó sobre esferas de igual radio, son iguales, siempre que los tres ángulos del uno sean respectivamente iguales à los tres del otro.*

Dem. En efecto, de la condicion dada, se deduce que los triàngulos suplementarios de los propuestos, tendrán sus lados respectivamente iguales, y que por consiguiente dichos triàngulos suplementarios serán iguales (§. 65).

Síguese de aqui que los tres ángulos del uno seràn iguales à los tres del otro ; y por consiguiente tambien lo seràn sus suplementos. Pero estos suplementos son los lados del triàngulo propuesto : luego queda demostrada la proposicion.

TEOREMA.

79. *La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis.*

Dem. Como la suma de cada ángulo del triángulo y del lado correspondiente de su suplementario ha de valer dos rectos ó H, resulta que entre los tres ángulos del triángulo y los tres lados de su suplementario, valdrán 3H. Si ahora se rebaja de esta suma el valor de los tres lados del triàngulo suplementario, que tiene que ser (§. 64 cor. 5) menor que 2H, quedarà para la suma de los tres ángulos un valor mayor que H ; con lo que qneda demostrada la primera parte de la proposicion.

Como no puede haber ningun ángulo que no valga menos de 180° ó dos rectos, resulta que entre los tres han de valer menos de seis rectos : luego queda tambien demostrada la segunda parte de la proposicion.

De lo dicho se infiere, que un triàngulo esférico puede tener dos ó tres ángulos rectos, y aun hasta tres àngulos obtusos, siempre que la suma de sus valores no llegue á 540.° Cuando tiene dos ángulos rectos se le da el nombre de triàngulo *birectángulo*, y cuando tiene tres el de *trirectángulo*. Cuando no tiene mas que uno se le llama simplemente triángulo *rectángulo*.

TEOREMA.

80. *La diferencia entre la suma de dos án-ángulos de un triàngulo y el tercero vale siempre menos de dos ángulos rectos.*

Dem. Si representamos por A, B, C los tres ángulos del triàngulo, los tres lados del suplemento valdrán H—A, H—B, H—C ; y como la suma de dos lados ha de ser mayor que el tercero se tendrà

$$H-A<H-B+H-C$$

De donde resulta que

$$B+C-A<H$$

81. Se da el nombre de *huso* esférico á una parte de la superficie de la esfera, tal como la ACBMA (fig. 13) comprendida entre dos semicircunferencias de círculos máximos : y bien se ve que si se prolongan dos de los ladós de un triàngulo esférico ABC, (fig. 21), v. g. los

a y *b*, hasta que vuelvan á encontrarse se formará otro triángulo ABC′ que por ser lo que le falta al primero para componer el huso CAC′B llamaremos triángulo *deficiente*. Resulta de aqui que *todo triángulo esférico tiene un lado comun con su deficiente, y que los otros dos lados del triángulo primitivo son suplementos de los del deficiente y viceversa. Lo mismo sucede respecto de los ángulos* A *y* B *opuestos á los lados prolongados que son tambien suplementos unos de otros.*

En cuanto á los terceros ángulos C y C′ *opuestos al lado que no se prolonga, son iguales uno á otro, como formados por los mismos planos.*

Infierese de aqui, que *los senos de los lados y ángulos de un triángulo esférico son respectivamente iguales á los de su deficiente.*

81. Bueno será advertir desde ahora, que cuando los lados de un triángulo esférico son menores que un cuadrante, se les da, aunque con impropiedad la denominacion de lados *agudos*, y cuando son mayores que un cuadrante se les da la de lados obtusos.

82. La consideracion del triángulo deficiente nos hace ver que *si se prolonga uno de los lados de un triángulo esférico, el ángulo esterno puede ser mayor, igual ó menor que los internos opuestos.*

En efecto, si dado un triángulo tal como ABC (fig. 21) prolongamos sus lados *a* y *b* hasta formar el triángulo deficiente ABC′, se verificará que si BC>AB será el ángulo BAC mayor que C (§. 73) y por consiguiente mayor tambien que C′=C: luego tenemos ya un ángulo esterno BAC mayor que uno de los internos opuestos.

Si fuese AB>AC se verificaria igualmente respecto de los àngulos opuestos á dichos lados que C>ABC; y como C′=C, seria ABC<C′ y tenemos un ángulo esterno ABC menor que uno de los internos opuestos.

Finalmente, si fuese AB=BC los àngulos BAC y C serian iguales: y por consiguiente BAC=C′: con lo que tendrá un àngulo esterno BAC igual á uno de los internos.

Resulta de todo lo dicho acerca de este particular, que *el ángulo esterno* CAB *será mayor que uno de los internos opuestos cuando la suma de los dos lados* AB *y* BC′ *que forman el otro interno, sea menor que una semicircunferencia: que el esterno será menor que uno de los internos opuestos, siempre que la suma de los dos lados que forman el otro interno sea mayor que una semicircunferencia, y por último, que el esterno sera igual á uno de los internos opuestos cuando entre los dos lados ya citados compongan una semicircunferencia.*

Si los lados AC y BC fuesen dos cuadrantes, lo serian tambien las AC′ y BC′; y para que el ángulo esterno CAB fuese igual al interno C′ seria menester con arreglo à lo que se acaba de decir, que el lado AB fuese igual á otro cuadrante. Pero como siendo AC y BC cuadrantes serian rectos los dos ángulos en A (§. 75) y los dos en B, tendria que ser tambien recto el C′ y por consiguiente el C: lo que quiere decir que *si los tres lados de un triángulo esférico son tres cuadrantes, los tres ángulos serán rectos*: ó lo que es lo mismo, *el triángulo será trirectángulo*. De la misma manera se haria ver que *cuando un triángulo esférico tiene dos lados iguales á cuadrantes, es birectángulo.*

83. Pues segun queda dicho (§. 63) todo triàngulo esférico determina en el centro de la esfera un ángulo triedro, cuyas partes son iguales à las del triàngulo, resulta con arreglo á lo dicho en la Geometría elemental (Man. §. 214) que se podrán representar todas sus partes por una construccion plana: de modo que si el triángulo fuese el ABC (fig. 14) se podrá representar como se ve en la figura 22. En ella segun se advertirá por las letras, los arcos AB, BC y AC′ corresponden á los AB, BC y AC de la otra; asi como las rectas CF y C′F′ representan la línea CF de la figura 14 y las DG y EG de la una representan respectivamente las DF y EF de la otra. El ángulo C′DF′=A: el CEF =B; el NML=C. Presentado el triángulo de esta manera nos podrà servir para hallar varias propiedades importantes de los triángulos esfèricos, como lo vamos á ver en seguida.

Teorema.

84. *Si los dos lados menores que supondremos ser a y b, de un triángulo esférico son agudos, hecha la construccion plana, las rectas* CE y C′D *prolongadas se encontrarán dentro del sector circular* AOB (fig. 22).

Dem. Porque como dichas rectas son los senos de los arcos *a* y *b*, prolongadas hasta que cada una de ellas volviese á encontrar á la circunferencia, los arcos que cortasen por la parte inferior de AO y BO serian respectivamente iguales á los *a* y *b*: resultando de aqui que para que el punto de interseccion de ambas estuviese en la circunferencia, era preciso que la suma de los arcos *a* y *b* fuese igual al tercero *c*; y entonces no podria haber triángulo (§. 64). Tampoco puede suceder que se encuentren fuera del círculo, pues para ello era necesario que el arco *c* fuese mayor que la suma de los otros dos: lo que es tambien imposible si ha de haber triángulo. Por consiguiente, no pudiendo ser dichas rectas CE y C′D paralelas, porque el arco *c* ha de ser menor que una semicircunferencia, y no pudiendo tampoco encontrarse en la circunferencia ni fuera del sector, se encontrarán dentro de él.

Esc. Lo mismo se verificaria, como es fácil conócer, aunque uno de los arcos v. g. *a* fuese igual ó mayor que un cuadrante, siempre que fuese menor que el tercer arco *c*. Si los dos arcos *a* y *b* fueran cuadrantes, el punto G se confundiria con el centro O.

Cor. De aqui se infiere, que *si los dos lados menores que supondremos ser a y b de un triángulo esférico, son agudos, tambien lo serán los ángulos opuestos.* Porque debiendo encontrarse los senos prolongados dentro del sector ya citado, la construccion plana seria tal cual se vé en la figura, y los dos ángulos A y B estarian representados por los C′DF′ y C.EF, los cuales son precisamente agudos, pues son àngulos inscritos, cuyos lados abrazan un arco menor que una semicircunferencia.

Teorema.

85. *Si los dos ángulos mayores de un triángulo esférico son obtusòs, lo serán tambien los lados opuestos.*

Dem. Sean A y B los dos ángulos mayores y que supondremos obtusos, y si representamos por *a′ b′ c′* los lados del triángulo suplementario y por A′, B′, C′ sus ángulos, se verificará que por ser A y B obtusos *a′* y *b′* serán agudos; y segun lo dicho en el corolario anterior, los ángulos A′ y B′ serán tambien agudos: luego sus suplementos *a* y *b* serán obtusos, que es lo que queriamos demostrar.

TEOREMA.

86. *Si los tres ángulos de un triángulo esférico* ABC (fig. 21) *son agudos, lo serán tambien los tres lados.*

Dem. Prolónguense dos de los lados v. g. AC y BC, hasta formar el triángulo deficiente ABC′, y este tendrá obtusos los dos ángulos ABC′ y BAC′ y agudo el tercero C′. De aqui se sigue (§. 85) que los dos lados AC′ y BC′ serán tambien obtusos, y por consiguiente los AC y BC seràn agudos.

Prolongando los dos lados AB y AC hasta formar el triángulo deficiente por aquella parte, se probará de la misma manera que AB ha de ser agudo tambien: luego queda demostrada la proposicion.

Cor. De aqui se infiere, que *si los tres lados son obtusos, lo serán tambien los tres ángulos.* Porque en tal caso los tres ángulos A′, B′, C′ del triángulo suplementario serán agudos. y por consecuencia lo serán igualmente sus tres lados *a′ b′ c′*; de donde se sigue, que los tres ángulos del triángulo primitivo han de ser precisamente obtusos.

TEOREMA.

87. *Si un triángulo esférico rectángulo tiene dos ángulos agudos, la hipotenusa será mayor que cualquiera de los otros dos lados.*

Dem. Porque à mayor àngulo se opone mayor lado.

TEOREMA.

88. *Si un triángulo esférico rectángulo* ABC (fig. 23) *tiene agudos los dos ángulos* A y B *tambien lo serán los lados opuestos.*

Dem. Suponiendo, como hemos supuesto, que sea C el ángulo recto, prolónguense los lados que le forman hasta que resulte el triángulo deficiente ABC′, el cual tendrá recto el ángulo C′ (§. 81) y obtusos los C′AB y C′BA como suplementos de los A y B del triángulo primitivo, que son agudos. De aqui se deduce, por lo demostrado (§. 85), que los lados AC′ y BC′ serán tambien obtusos; y por consiguiente sus suplementos AC y BC serán agudos.

TEOREMA.

89. *Si un triángulo esférico* ABC (fig. 24) *tiene un lado* AB *igual ó mayor que un cuadrante, y los otros dos lados* AC y BC *son agudos, será obtuso el ángulo* m *formado por estos.*

Dem. Empezaremos suponiendo que

$$AB = \tfrac{1}{2}H.$$

Si se forman en A y en B dos ángulos rectos, y se prolongan los arcos que los forman hasta que se encuentren en D, los AD y BD serán cuadrantes (§. 75 Cor.): y si ademas prolongamos uno de los lados agudos del triángulo, v. g. AC hasta que encuentre en E al BD, como A será el polo del arco BD, será AE otro cuadrante y perpendicular á BD. Pero en el triángulo BCE los dos lados BC y BE que forman el ángulo interno B valen juntos menos de una semicircunferencia, pues cada uno de ellos es agudo: luego (§, 82) el ángulo esterno *m* será mayor el que interno *n*, y siendo este recto aquel, será obtuso.

Si fuese AB (fig. 25) mayor que un cuadrante el ángulo D seria obtuso, pues su medida es el arco AB; pero prolongando siempre el arco AC hasta que fuese igual á un cuadrante y tirando por los puntos D y F el arco DG, tendriamos por las mismas razones dichas antes, que el ángulo *m* sería mayor que el ángulo en F, y que siendo este recto *m* debe ser obtuso.

Cor. 1.º De aquí se infiere, que *si en un triángulo esférico rectángulo son agudos los dos lados que forman el ángulo recto, lo será tambien la hipotenusa.* Porque si esta fuese igual ó mayor que un cuadrante, el ángulo opuesto segun lo acabado de demostrar, no podia ser recto sino obtuso.

Cor. 2.º De esto último se infiere igualmente que *tambien será aguda la hipotenusa* *cuando sean obtusos los dos lados que forman el ángulo recto.* Porque prolongados dichos lados hasta formar el triángulo deficiente, este tendrá agudos los dos lados que formen su ángulo recto, y por consiguiente su hipotenusa será aguda, segun lo dicho en el corolario anterior. Pero esta hipotenusa es comun para ambos triàngulos, luego se verifica la proposicion.

Teorema.

90. *Si los lados que forman el ángulo recto de un triángulo esférico rectángulo son el uno agudo y el otro obtuso, la hipotenusa será obtusa.*

Dem. Sea el triángulo ABC (fig. 26) en que se supone obtuso el lado *a* ò BC y agudo el *b* ó AC, y si se considera formado el triángulo deficiente ACB′, este tendrá agudos los dos lados AC y B′C que forman su ángulo recto, y por consiguiente (cor. 1.º §. 87) su hipotenusa AB′ será aguda: luego la hipotenusa AB del otro será obtusa.

Teorema.

91. *En los triángulos esféricos rectángulos los lados que forman el ángulo recto son de la misma especie que los ángulos opuestos.*

Dem. Sea el triàngulo ABC (fig. 27) rectàngulo en C, y en el que supondremos que el ángulo A es agudo y el *n* obtuso, y para demostrar que el lado opuesto AC lo es tambien, prolongaremos los lados AB y AC hasta formar el triángulo deficiente A′BC. Ahora observaremos que en este último hay dos àngulos agudos: el A′ por igual A y el *m* por ser suplemento de *n*; por consiguiente (§. 88), los dos lados opuestos BC y A′C serán agudos tambien: de donde se deduce, que AC será obtuso. En cuanto á BC opuesto al ángulo A ya queda dicho que es agudo.

Supongamos ahora que A y *n* fuesen obtusos, y por lo dicho (§. 85) los dos lados AC y BC deben serlo tambien.

Teorema.

92. *Si un triángulo esférico* ABC (fig. 28), *tiene dos ángulos* B *y* C *ambos agudos ó ambos obtusos, el arco* AD *que baje desde el otro ángulo* A *perpendicularmente sobre el lado* BC, *caerá dentro del triángulo; pero si dichos ángulos son uno agudo y otro obtuso caerá fuera.*

Dem. Como el espresado arco AD no puede confundirse con ninguno de los otros dos AB, AC; pues para ello era preciso que los angulos B y C fuesen rectos, lo que es contra el supuesto; habrá de caer dentro ó fuera del triàngulo. Pero si los dos àngulos antedichos son de una misma especie, el arco AD no podrá caer fuera, pues si tal sucediese se verificaria que por ser lado comun de los dos triángulos rectángulos ABD′ y ACD′, tendria que ser (§. 91) de la misma especie que los dos ángulos opuestos ABD′ y ACD′: lo cual es un absurdo, pues si B y C fueran agudos, ACD′ seria obtuso como suplemento de C; y si B y C fuesen obtusos, ACD′ tendria que ser agudo, y siempre resultaria que si el arco AD cayese fuera, tendria que ser á un mismo tiempo agudo y obtuso, lo que es imposible: luego el arco CD caerá dentro.

Si los dos ángulos B y C fuesen uno agudo y otro obtuso, no podrá el arco AD caer dentro del triàngulo, porque entonces tendria que ser tambien agudo y obtuso á un mismo tiempo, como opuesto á dichos dos àngulos B y C en los dos triángulos rectángulos ABD y ADC: luego caerá fuera.

Teorema.

93. *Si un triángulo esférico* ABC (fig. 29), *tiene dos àngulos* B *y* A *agudos y desiguales, el lado opuesto al menor de dichos ángulos que supondremos ser* B *será precisamente agudo.*

Dem. Observaremos en primer lugar que el ángulo C tiene que ser obtuso, pues si fuese agudo lo serian los tres ángulos del triángulo y por consiguiente (§. 86) los tres lados, y si C fuese recto estariamos en el caso demostrado (§. 88). Hecha esta observacion, si se forma ahora el triángulo deficiente ABC′ prolongando los lados AC y BC, dicho triángulo tendrá obtusos sus tres ángulos C′, C′AB y C′BA, siendo ademas el C′BA>C′AB como suplemento de menor ángulo ; de donde se sigue que ha de ser siempre uno de los dos ángulos mayores del triángulo ABC′, ya sea C′>C′AB, ya sea C′<C′AB: luego por lo dicho (§. 85) el arco AC′ será obtuso, y por consecuencia el AC tiene que ser agudo.

Teorema.

94. *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos obtusos y desiguales, será obtuso el lado opuesto al mayor de ellos.*

Dem. Supondremos ahora que el triángulo dado es el ABC′ (fig. 29) y que ABC es el deficiente: que los ángulos A y B son obtusos, y que C′BA>C′AB ; lo que da ABC<CAB ; y por lo demostrado en el teorema anterior, el arco AC será precisamente agudo : luego AC′ será obtuso.

Teorema.

95. *El area de un huso esférico tal como*

ACBMA (fig. 13) *es á la de toda la esfera, como el ángulo formado por los planos* ACB *y* AMB *que terminan el huso, es á cuatro rectos; ó como el arco* CM *es á toda la circunferencia.*

Dem. Si el arco CM es comensurable con la circunferencia, la proposicion es evidente, pues el huso se podrá colocar exactamente tantas veces sobre la superficie de la esfera, como el arco CM en la circunferencia.

Si la circunferencia y el arco son incomensurables, se demostrará el teorema haciendo ver que la relacion que haya entre el huso y la superficie de la esfera no puede ser ni mayor ni menor que la que haya entre el arco y la circunferencia; como se hizo en la Geometria elemental respecto de los ángulos y arcos.

Cor. De aqui se infiere, que *la superficie de un huso esférico es igual al producto que resulta de multiplicar la de toda la esfera por el ángulo que forman los planos del huso, (ó por el arco que le mide) partido todo por* 2H *ó cuatro ángulos rectos.* Porque espresando por *u* la superficie del huso, por S la de toda la esfera, y por C el ángulo que forman los dos semicírculos, ó lo que es lo mismo, el arco que le mide, tendremos en virtud de lo que se acaba de demostrar

$$u : S :: C : 2H$$

de donde se deduce que $u=\frac{SC}{2H}$

Teorema.

96. *El area de un triángulo esférico es á la de toda la esfera, como el esceso que tenga la suma de los tres ángulos del triángulo sobre dos rectos ó* H, *es á ocho rectos ó* 4 H.

Dem. Sea el triángulo ABC (fig. 30), y desde luego podremos notar que si se prolongan todos sus lados hasta que lleguen á encontrar á un círculo máximo DEFGLK trazado de cualquier modo fuera del triángulo; entre el triángulo dado, los BKD, FCE, GAL y los espacios DBCE, ACFG y ABKL componen toda la superficie de uno de los hemisferios en que divide á la esfera el círculo DEFGLK: de modo que si espresamos por S el area de la esfera, se tendrà la ecuacion

$$ABC+BKD+FCE+GAL+DBCE+$$

$$ACFG+ABKL=\tfrac{1}{2}S \quad (1)$$

Pero $$ABC+DBCE=DAE$$

$$ABC+ACFG=FBG$$

$$ABC+ABKL=LCK$$

por lo que sustituyendo en la ecuacion (1) se transformará en

$$3\ ABC + DBCE + ACFG + ABKL =$$

$$DAE + FBG + LCK \quad (2)$$

Si añadimos ahora á uno y otro miembro de esta última ecuacion los otros tres triángulos, resultarà

$$3\ ABC + DBCE + ACFG + ABKL + GAL +$$

$$BKD + FCE = DAE + GAL + FBG +$$

$$BKD + LCK + FCE \quad (3)$$

Pero el primer miembro de esta ecuacion compone, como se ve en la ecuacion (1), toda la superficie del hemisferio, mas dos veces el triàngulo ABC: luego haciendo la sustitucion correspondiente, se tendrá

$$2\ ABC + \tfrac{1}{2}S =$$

$$DAE + GAL + FBG + BKD + LCK + FCE \quad (4)$$

Ahora observaremos que siendo el arco GA suplemento del AD, el arco AL suplemento del AE y el ángulo LAG igual al BAC como opuestos por el vértice; el triángulo GAL es

igual al triàngulo deficiente del DAE: luego DAE+GAL serà igual al huso esférico formado por los arcos AE, y AD prolongados hasta que se encuentren. Del mismo modo hallariamos FBG+BDK, es igual al huso formado por los arcos BG y BF, y finalmente LCK+FCE igual al huso formado por CL y CK prolongados. Síguese de aqui, que si representamos el primero de dichos usos por u, el segundo por u' y el tercero por u'', la ecuacion (4) tomará esta forma

$$2\,ABC+\tfrac{1}{2}S=u+u'+u'' \quad (5)$$

Pero segun lo dicho en el corolario del párrafo anterior

$$u=\frac{SA}{2H}$$

y de la misma manera

$$u'=\frac{SB}{2H}$$

y por último

$$u''=\frac{SC}{2H}$$

con lo que sustituyendo en la ecuacion (5) tendremos

$$2\,ABC+\tfrac{1}{2}S=\frac{S(A+B+C)}{2H}$$

de donde se deduce

$$2\,ABC=\frac{S(A+B+C-H)}{2H}$$

y finalmente

$$ABC=\frac{S(A+B+C-H)}{4H}$$

Puesta esta ecuacion en proporcion nos dará

$$ABC:S::A+B+C-H:4H$$

que es lo que se queria demostrar.

De la resolucion de los triángulos esféricos.

97. Para proceder á la resolucion de los triángulos esféricos, tendremos presente que, segun queda dicho (§. 83), las partes de todo triàngulo de esta clase, se pueden representar en una construccion plana, tal como se ve en la figura 22: suponiendo que el triángulo fue-

se el ABC (fig. 14). En dicha figura 22 podemos notar que los segmentos CE y C′D de las perpendiculares bajadas desde C′ y C′ á los radios BO y AO son los senos de los arcos *a* y *b*; y que por consiguiente EO y DO son los cosenos de los mismos arcos. Ademas sabemos por lo dicho en la Geometria elemental (Man. §. 214) que el ángulo C′DF′=A y el CEF =B

De aqui podremos deducir en el triángulo DC′F′ que

$$C'F'=DC'\times sen.\ C'DF'=sen.\ b\times sen.\ A \quad (1)$$

y en el triángulo CEF hallaremos que

$$CF=CE\times sen.\ CEF=sen.\ a\times sen.\ B \quad (2)$$

Pero las rectas C′F′ y CF representan ambas á la CF de la figura 14: luego son iguales y nos darán la ecuacion

$$sen.\ b\times sen.\ A=sen.\ a\times sen.\ B \quad (3)$$

Del mismo modo si la construccion plana hecha sobre el ángulo plano AOB se hiciese en el BOC, tomando el arco CL=AC′, se hallaria

$$sen.\ b\times sen.\ C=sen.\ c\times sen.\ B \quad (4)$$

y tambien se podria hallar de un modo análogo que

$$sen.\, a \times sen.\, C = sen.\, c \times sen.\, A \quad (5)$$

De las tres ecuaciones (3), (4) y (5) se deduce la siguiente série de razones iguales

$$sen.\, a : sen.\, b : sen.\, c :: sen.\, A : sen.\, B : sen.\, C$$

lo que quiere decir que *en los triángulos esféricos, los senos de los lados tienen entre sí la misma razon que los de los ángulos opuestos*: y esta proposicion se conoce con el nombre de analogia general.

98. Aunque las ecuaciones que anteceden se han deducido en el supuesto de ser agudos los tres lados del triàngulo, se verificaràn tambien en cualquier otro caso, como lo vamos á hacer ver.

Supongamos que los tres lados fuesen cuadrantes, y entonces, segun lo dicho (§. 82), los tres ángulos serian rectos y por consiguiente se verificaba la proposicion, pues todos los senos, tanto de los lados como de los ángulos, serian iguales entre sí.

Supongamos que los tres lados *a*, *b*, *c*, fuesen obtusos y resultaria de aqui, que los tres ángulos A′, B′, C′ del triángulo suplementario serian agudos y sus tres lados tambien (§. 86): luego respecto del triángulo suplementario se verificaria la proposicion; y tambien se verificaria respecto del primitivo, porque los senos de los lados del uno son los mismos que los de los àngulos del otro, y viceversa.

Infiérese de aqui que la proposicion se verificarà igualmente si el triángulo tuviese dos lados agudos y uno obtuso, porque prolongando aquellos hasta formar el triángulo deficiente, este tendria sus tres lados obtusos, y por consiguiente se verificaria la proposicion respecto de él y tambien respecto del primitivo, porque los senos de los arcos ó ángulos son los mismos que los de sus suplementos.

Si el triángulo tuviese dos lados que fuesen cuadrantes, siendo agudo el otro lado, este último seria la medida del ángulo opuesto. De aqui se sigue, que el seno de este lado seria igual al de su ángulo opuesto; y como ha de suceder lo mismo con los otros, porque el triángulo es birectángulo, se verifica la proposicion.

Esto mismo sucedería, y por las mismas razones, aunque el tercer lado fuese obtuso siendo los otros dos iguales á cuadrantes.

Si el triángulo tuviese dos lados a y b obtusos y el tercer lado c fuese agudo, prolongando los primeros hasta formar el triángulo deficiente, los tres lados de este, que llamaremos a', b' c serian agudos: luego se verificaria que

$$\textit{sen.}\,a' : \textit{sen.}\,b' : \textit{sen.}\,c :: \textit{sen.}\,(H-A) : \textit{sen.}\,(H-B) : \textit{sen.}\,C'.$$

pero como el seno de un arco ó ángulo es el mismo que el de su suplemento, y ademas $C=C'$; seria tambien

$$\textit{sen.}\,a : \textit{sen.}\,b : \textit{sen.}\,c :: \textit{sen.}\,A : \textit{sen.}\,B : \textit{sen.}\,C$$

Si el triángulo tuviese un lado igual à un cuadrante y los otros dos fuesen agudos, el ángulo opuesto al primero seria obtuso (§. 89): y la construccion plana de la figura 22 seria la misma, con la única diferencia de que el ángulo que diese seria el suplemento del buscado.

De aqui se infiere, que cuando el triángulo tenga dos lados obtusos y el tercero igual á un cuadrante, se verificará tambien la proposicion: porque prolongando los primeros hasta formar el triángulo deficiente, este tendrà dos lados agudos y el otro igual á un cuadrante, y se hallará en el caso anterior.

Por último, si cada uno de los lados es de diferente especie, prolongando el obtuso y el cuadrante, el triángulo deficiente que resulte tendrá tambien dos lados agudos y uno igual á un cuadrante, y se hallará en el mismo caso.

99. De las ecuaciones (3), (4) y (5) (§. 97) se deducen las siguientes:

$$(A)\begin{cases} sen.\ a = \dfrac{sen.\ b \times sen.\ A}{sen.\ B} \\[2ex] sen.\ b = \dfrac{sen.\ c \times sen.\ B}{sen.\ C} \\[2ex] sen.\ c = \dfrac{sen.\ a \times sen.\ C}{sen.\ A} \end{cases}$$

$$(B)\begin{cases} sen.\ A = \dfrac{sen.\ a \times sen.\ B}{sen.\ b} \\[2ex] sen.\ B = \dfrac{sen.\ b \times sen.\ C}{sen.\ c} \\[2ex] sen.\ C = \dfrac{sen.\ c \times sen.\ A}{sen.\ a} \end{cases}$$

Por medio de estas fórmulas podremos averiguar el valor de un lado, cuando se conozca el valor del ángulo opuesto y de uno de los adyacentes, y ademas el lado opuesto á este último: y tambien podremos averiguar el valor de un ángulo cuando se conozca el valor del lado que se le oponga, y ademas el de otro ángulo y su lado opuesto. Esto equivale á decir, que debemos servirnos de estas fórmulas cuando haya que resolver un triángulo esférico, en que se conozcan dos lados y el ángulo opuesto al uno de ellos: ó dos ángulos y el lado opuesto al uno de ellos.

190. Para hallar el valor del coseno de un lado a, observaremos que dicho coseno es OE, (fig. 22) y que si desde el punto D se tira la DN perpendicular á BO resultará

$$\cos. a = OE = ON + EN \quad (1)$$

Para determinar el valor de estos dos segmentos ON y EN observaremos en cuanto al primero, que $ON = DO \times \cos. DON$; pero siendo $DO = \cos. b$, y teniendo el àngulo DON por medida al arco $AB = c$, se tendrá haciendo las sustituciones

$$ON = \cos. b \cos. c$$

Para hallar el valor del segundo segmento EN, tiraremos desde el punto G la perpendicular GR á la DN, con lo que será $GR = EN$, por partes de paralelas interceptadas entre otras paralelas. Pero $GR = DG \times sen. GDR$, y como $DG = DF'$ (Man. de Geom. §. 214) y

$$DF' = C'D \times \cos. C'DF' = \operatorname{sen.} b \times \cos. A$$

será tambien

$$GR = \cos. A \times \operatorname{sen.} b \times \operatorname{sen.} RDG$$

Ademas los ángulos RDG y AOB son iguales, pues los triángulos DRG y AOn son semejantes por ser los tres lados del uno respectivamente perpendiculares á los del otro; y siendo el arco $AB = c$, la medida del uno lo será tambien del otro. Luego $\operatorname{sen.} RDG = \operatorname{sen.} c$, y sustituyendo en la última ecuacion será

$$GR = EN = \cos. A \times \operatorname{sen.} b \times \operatorname{sen.} c$$

De aqui resulta haciendo las sustituciones en la ecuacion (1)

$$\cos. a = \cos. b \times \cos. c + \cos. A \times \operatorname{sen.} b \times \operatorname{sen.} c$$

Haciendo una construccion semejante respecto de los otros lados del triángulo esférico, se obtendrán las espresiones de sus cosenos respectivos; y de este modo tendremos las tres ecuaciones siguientes

$$\left.\begin{array}{l} \cos. a = \cos. b \times \cos. c + \cos. A \times \text{sen}. b \times \text{sen}. c \\ \cos. b = \cos. a \times \cos. c + \cos. B \times \text{sen}. a \times \text{sen}. c \\ \cos. c = \cos. a \times \cos. b + \cos. C \times \text{sen}. a \times \text{sen}. b \end{array}\right\} (C)$$

101. Sustituyendo ahora en lugar de *cos.* A, *cos.* B y *cos.* C sus iguales

$$1 - \text{sen. ver. } A,\ 1 - \text{sen. ver. } B,\ \text{y } 1 - \text{sen. ver. } C,$$

se transformarán las tres ecuaciones anteriores en

$$\left.\begin{array}{l} \cos. a = \cos. b \times \cos. c + \text{sen}. b \times \text{sen}. c - \\ \text{sen. ver}. A \times \text{sen}. b \times \text{sen}. c \\ \\ \cos. b = \cos. a \times \cos. c + \text{sen}. a \times \text{sen}. c - \\ \text{sen. ver}. B \times \text{sen}. a \times \text{sen}. c \\ \\ \cos. c = \cos. a \times \cos. b + \text{sen}. a \times \text{sen}. b - \\ \text{sen. ver}. C \times \text{sen. ver}. a \times \text{sen. ver}. b \end{array}\right\} (D)$$

Despejando en estas ecuaciones los senos versos de los ángulos, y teniendo presente que

$$\cos. b \times \cos. c + \text{sen}. b \times \text{sen}. c = \cos. (b - c)\ ,$$

y asi de los demas se deducen estas otras

$$sen.\ ver.\ A = \frac{cos.(b-c) - cos.\ a}{sen.\ b \times sen.\ c}$$

$$sen.\ ver.\ B = \frac{cos.(a-c) - cos.\ b}{sen.\ a \times sen.\ c}$$

$$sen.\ ver.\ C = \frac{cos.(a-b) - cos.\ c}{sen.\ a \times sen.\ b}$$

Pero por lo dicho (§. 49) los segundos miembros de estas ecuaciones son iguales á los de las siguientes

$$\left.\begin{aligned} sen.\ ver.\ A &= \frac{2sen.\tfrac{1}{2}(b-c+a)sen.\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{sen.\ b \times sen.\ c} \\ sen.\ ver.\ B &= \frac{2sen.\tfrac{1}{2}(a-c+b)sen.\tfrac{1}{2}(b-a+c)}{sen.\ a \times sen.\ c} \\ sen.\ ver.\ C &= \frac{2sen.\tfrac{1}{2}(a-b+c)sen.\tfrac{1}{2}(c-a+b)}{sen.\ a \times sen.\ b} \end{aligned}\right\}(E)$$

102. Si en vez de sustituir en las ecuaciones (C) en lugar de cos. A, cos. B y cos. C sus iguales

$1-\text{sen. ver. } A$, $1-\text{sen. ver. } B$ y $1-\text{sen. ver. } C$.

se sustituyen las espresiones

sus ver. $A-1$, sus. ver. $B-1$ y sus ver. $C-1$,

resultarian las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\cos. a=\cos. b\times\cos. c+\text{sus. ver. } A\times \\ \text{sen. } b\times\text{sen. } c-\text{sen. } b\times\text{sen. } c \\ \\ \cos. b=\cos. a\times\cos. c+\text{sus. ver. } B\times \\ \text{sen. } a\times\text{sen. } c-\text{sen. } a\times\text{sen. } c \\ \\ \cos. c=\cos. a\times\cos. b+\text{sus. ver. } C\times \\ \text{sen. } a\times\text{sen. } b-\text{sen. } a\times\text{sen. } b\end{array}\right\}(F)$$

de las cuales podremos deducir que

$$\text{sus. ver. } A=\frac{\cos. a-\cos. (b+c)}{\text{sen. } b\times\text{sen. } c}$$

$$\text{sus. ver. } B=\frac{\cos. b-\cos. (a+c)}{\text{sen. } a\times\text{sen. } c}$$

$$\text{sus. ver. } C=\frac{\cos. c-\cos. (a+b)}{\text{sen. } a\times\text{sen. } b}$$

y por la misma razon dada para las de los senos versos

$$\left.\begin{array}{l}\text{sus. ver.}A=\dfrac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen. }b\times\text{sen. }c}\\[2ex]\text{sus. ver.}B=\dfrac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen. }a\times\text{sen. }c}\\[2ex]\text{sus. ver.}C=\dfrac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\text{sen. }a\times\text{sen. }b}\end{array}\right\}(G)$$

103. Las fórmulas (E) y (G) podràn servir, valiéndose de tablas que contengan los logaritmos de los senos versos, para hallar los tres ángulos de un triángulo esférico, cuando se conozcan los tres lados del mismo: ofreciendo la (G) la ventaja de que en todas tres entra una misma cantidad, sen. $\frac{1}{2}(a+b+c)$. En el caso de que no haya estas tablas se podrán transformar dichas fórmulas en otras, teniendo presente que

$$\text{sen. ver. }A=2\,\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}A \text{ y sus ver. } A=2\cos.^2\tfrac{1}{2}A$$

(§. 10), porque sustituyendo en las tres ecuaciones (E) en lugar de los senos versos los duplos de los senos cuadrados de sus mitades, dividiendo por 2 y estrayendo las raices resultará

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(b-c+a)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sen.}\,b\times\text{sen.}\,c}}\\[2ex]
\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a-c+b)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(b-a+c)}{\text{sen.}\,a\times\text{sen.}\,c}}\\[2ex]
\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a-b+c)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(c-a+b)}{\text{sen.}\,a\times\text{sen.}\,b}}
\end{aligned}\right\}(H)$$

Haciendo lo mismo en las ecuaciones (G) respecto de los susenos versos tendremos

$$\left.\begin{aligned}
\cos.\,\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}\,b\times\text{sen.}\,c}}\\[2ex]
\cos.\,\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}\,a\times\text{sen.}\,c}}\\[2ex]
\cos.\,\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sen.}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c)}{\text{sen.}\,a\times\text{sen.}\,b}}
\end{aligned}\right\}(K)$$

Dividiendo ordenadamente las tres ecuaciones (H) por las (K) se obtendrian tambien las siguientes

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(b-c+a)\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a-b+c)}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}}\\
\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a-c+b)\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(b-a+c)}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}}\\
\operatorname{tang.}\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a-b+c)\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(c-a+b)}{\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)}}
\end{aligned}\right\}(L)$$

Procediendo de un modo análogo, quiere decir, dividiendo ordenadamente las tres ecuaciones (K) por las (H), se hallarian las fórmulas de las cotangentes.

101. Las fórmulas (E) y (G) de los senos versos y susenos versos son preferibles á las (H), (K) y (L), tanto porque nos determinan inmediatamente los valores de los ángulos y no sus mitades, como porque valiéndose de ellas, se evita la division por 2 que hay que hacer en el cálculo logarítmico de las otras por razon del radical, es verdad que sirviéndose de dichas fórmulas (E) y (G) habrá que emplear un logaritmo mas; pero como este es siempre el del número 2, pronto se aprenderá de memoria y no habrá que buscarle en las tablas.

Aunque á primera vista pudiera ocurrir la dificultad de que las fórmulas (H), (K) y (L) dan lugar á duda, porque debiendo tener todo radical de segundo grado el signo de ambigüedad, no se sabria si se han de tomar los valores positivos ó los negativos: esta dificultad se desvanecerá bien pronto si se atiende á que teniendo que valer los ángulos del triángulo menos de 180°, sus mitades han de valer menos de 90°, y por consiguiente los valores de las tangentos, senos y cosenos tienen que ser positivos.

105. Como todo lo que queda dicho se verifica en cualquier triángulo esférico, si llamamos a′, b′ y c′ á los lados del triángulo suplementario de aquel que se diere, y A′, B′ y C′ á sus ángulos se tendrá tambien

$$\text{sen. ver.}A'=\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}(b'-c'+a')\text{sen.}\frac{1}{2}(a'-b'+c')}{\text{sen. }b'\times\text{sen. }c'}$$

$$\text{sus. ver.}A'=\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}(a'+b'+c')\text{sen.}\frac{1}{2}(b'+c'-a')}{\text{sen. }b'\times\text{sen. }c'}$$

y lo mismo respecto de los demas ángulos. Pero teniendo presente que

$$a'=H-A,\quad b'=H-B\quad \text{y } c'=H-c$$

que $$\text{sen. ver. }A'=\text{sus. ver. }a$$

porque el seno verso de un arco es igual al suseno verso de su suplemento, y por último que el seno de todo arco es igual al de su suplemento, se podrá transformar la primera de las dos ecuaciones anteriores en

$$\text{sus. ver. } a = \frac{2\text{sen. }\frac{1}{2}[H-(A+B-C)]\ \text{sen. }\frac{1}{2}[H-(A+C-B)]}{\text{sen. } B \times \text{sen. } C}$$

Ademas, segun lo dicho (§. 16)

$$\text{sen. }\tfrac{1}{2}[H-(A+B-C)] = \cos.\ \tfrac{1}{2}(A+B-C)$$

$$\text{sen. }\tfrac{1}{2}[H-(A+C-B)] = \cos.\ \tfrac{1}{2}(A+C-B)$$

luego si sustituimos en la fórmula anterior del valor del suseno verso de a, se convertirá en

$$\text{sus. ver. } a = \frac{2\cos.\ \frac{1}{2}(A+B-C)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen. } B \times \text{seu. } C}$$

Del mismo modo y valiéndonos de la segunda de dichas ecuaciones tendriamos

$$\text{sen. ver. } a = \frac{2\text{sen. }\frac{1}{2}[3H-(A+B+C)]\text{sen. }\frac{1}{2}[H-(B+C-A)]}{\text{sen. } B \times \text{sen. } C}$$

y cómo (§. 19)

$$\text{sen.}\left[\tfrac{3}{2}H-\tfrac{1}{2}(A+B+C)\right]=-\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)$$

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}[H-(B+C-A)]=\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)$$

será sustituyendo

$$\text{sen. ver.}a=-\frac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen. }B\times\text{sen. }C}$$

Haciendo lo mismo respecto de los demas ángulos obtendriamos finalmente las seis fórmulas siguientes

$$\left.\begin{array}{l}
\text{sen. ver. }a= \\
-\dfrac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen. }B\times\text{sen. }C} \\
\text{sen. ver. }b= \\
-\dfrac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen. }A\times\text{sen. }C} \\
\text{sen. ver. }c= \\
-\dfrac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{sen. }A\times\text{sen. }B}
\end{array}\right\}(LL)$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{sus. ver. } a = \\ \dfrac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen. } B\times\text{sen. } C} \\ \\ \text{sus. ver. } b = \\ \dfrac{2\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen. } A\times\text{sen. } C} \\ \\ \text{sus. ver. } c = \\ \dfrac{2\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen. } A\times\text{sen. } B}\end{array}\right\}(M)$$

106. Por medio de ellas se podrá resolver un triàngulo esférico, cuyos tres àngulos sean conocidos, siempre que haya tablas que contengan los logaritmos de los senos versos y su-senos versos; y en el caso contrario se hará uso de las fórmulas siguientes, que se deducen de las (LL) y (M) del mismo modo que se deducen las (H), (K) y (L) de las (F) y (G).

$$\left.\begin{aligned}
&\text{sen. } \tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen. } B \times \text{sen. } C}}\\[2ex]
&\text{sen. } \tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}A+C-B)}{\text{sen. } A \times \text{sen. } C}}\\[2ex]
&\text{sen. } \tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C)\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\text{sen. } A \times \text{sen. } B}}
\end{aligned}\right\}(N)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen. } B \times \text{sen. } C}}\\[2ex]
&\cos.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen. } A \times \text{sen. } C}}\\[2ex]
&\cos.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)\cos.\tfrac{1}{2}B+C-A)}{\text{sen. } A \times \text{sen. } B}}
\end{aligned}\right\}(P)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{tang. } \tfrac{1}{2}a = \\
\sqrt{-\dfrac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}} \\
\text{tang. } \tfrac{1}{2}b = \\
\sqrt{-\dfrac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}} \\
\text{tang. } \tfrac{1}{2}c = \\
\sqrt{-\dfrac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}}
\end{array}\right\}(Q)$$

107. Lo mismo que hemos hecho en el párrafo 105 respecto de las fórmulas (E) y (G) se puede hacer respecto de las (C) (§. 100): quiere decir, que si representamos por a', b', c', los lados del triángulo suplementario de aquel que se diere, y por A', B', C', sus ángulos, se tendrán las ecuaciones

$$\cos.\ a' = \cos.\ b' \cos.\ c' + \cos.\ A' \text{ sen. } b' \text{ sen. } c'$$

$$\cos.\ b' = \cos.\ a' \cos.\ c' + \cos.\ B' \text{ sen. } a' \text{ sen. } c'$$

$$\cos.\ c' = \cos.\ a' \cos.\ b' + \cos.\ C' \text{ sen. } a' \text{ sen. } b'$$

sustituyendo ahora en lugar de a', b', c', A', B' y C' sus iguales $\tfrac{1}{2}H-A$, $\tfrac{1}{2}H-B$ etc., se tendran estas otras

$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-A)=\cos.(\tfrac{1}{2}H-B)\cos.(\tfrac{1}{2}H-C)+$$
$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-a)\,\text{sen.}(\tfrac{1}{2}H-B)\,\text{sen.}(\tfrac{1}{2}H-C)$$

$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-B)=\cos.(\tfrac{1}{2}H-A)\cos.(\tfrac{1}{2}H-C)+$$
$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-b)\,\text{sen.}(\tfrac{1}{2}H-A)\,\text{sen.}\tfrac{1}{2}H-C)$$

$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-C)=\cos.(\tfrac{1}{2}H-A)\cos.(\tfrac{1}{2}H-B)+$$
$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-c)\,\text{sen.}(\tfrac{1}{2}H-A)\,\text{sen.}(\tfrac{1}{2}H-B)$$

Recordando ahora que

$$\cos.(\tfrac{1}{2}H-A)=-\cos.a$$

y asi de las demas, se podrán transformar estas ecuaciones en las siguientes

$$-\cos.A=\cos.B\cos.C-\cos.a\ \text{sen.}B\,\text{sen.}C$$

$$-\cos.B=\cos.A\cos.C-\cos.b\ \text{sen.}A\,\text{sen.}C$$

$$-\cos.C=\cos.A\cos.B-\cos.c\ \text{sen.}A\,\text{sen.}B$$

que cambiando los signos nos dan

$$\left.\begin{array}{l}\cos.A=-\cos.B\cos.C+\cos.a\ \text{sen.}B\text{sen.}C\\ \cos.B=-\cos.A\cos.C+\cos.b\ \text{sen.}A\text{sen.}C\\ \cos.C=-\cos.A\cos.B+\cos.c\ \text{sen.}A\,\text{sen.}B\end{array}\right\}(R)$$

108. Cuando se quiera resolver un triàngulo esférico en que se conozcan dos lados y el ángulo formado por ellos, bastarán para conseguirlo las fórmulas (C) en ciertos casos particulares, pero no en todos.

Si por ejemplo fuesen iguales los dos lados dados, que llamaremos b y c, la primera de dichas fórmulas (C) se convertiria en

$$\cos. a = \cos.^2 b + \cos. A \times \text{sen.}^2 b$$

y restando ambos miembros de la unidad seria

$$1 - \cos. a = 1 - \cos.^2 b + \cos. A \times \text{sen.}^2 b$$

ó sustituyendo en vez de $1-\cos. a$ y $1-\cos.^2 b$ sus valores, será

$$\text{sen. ver. } a = \text{sen.}^2 b + \cos. A \text{ sen.}^2 b$$

Descomponiendo el segundo miembro por el factor comun $\text{sen.}^2 b$, resultarà

$$\text{sen. ver. } a = \text{sen.}^2 b (1 + \cos. A)$$

y finalmente

$$\text{sen. ver. } a = \text{sus. ver. } A \times \text{sen.}^2 b \quad (S)$$

Fácilmente se conocerá que tambien podria ser

$$\text{sen. ver. } a = \text{sus. ver. } A \times \text{sen.}^2\ c$$

Averiguado ya de esta manera el valor del tercer lado *a*, se podrian hallar los dos ángulos B y C por las fórmulas (B) (§. 99).

Para poder hacer uso de las tablas comunes que no contienen los logaritmos de los senos versos, se transformará la fórmula (S) como se ve á continuacion

$$2\ \text{sen.}^2\ \tfrac{1}{2}a = 2\ \text{cos.}^2\ A \times \text{sen.}^2\ b$$

de la que se infiere esta otra

$$\text{sen. } \tfrac{1}{2}a = \text{cos. } \tfrac{1}{2}A \times \text{sen. } b\ \ (T)$$

Tambien se podria poner sen. c en lugar de sen. b

109. Si uno de los lados dados, v. g. *b*, fuese un cuadrante, su coseno valdria *cero*, y su seno seria igual al radio que se toma por unidad. De aqui resulta que la primera de las fórmulas (C) (§. 100), se transformará en

$$\text{cos. } a = \text{cos. } A \times \text{sen. } c\ \ (U)$$

por cuyo medio se podrá hallar el tercer lado *a* cuando se conozcan los otros dos y el ángulo que forman; y en seguida se pueden hallar tambien los valóres de los otros dos ángulos B y C por las fórmulas ya conocidas.

110. Fuera de estos casos particulares de que acabamos de hacer mencion, no son suficientes las fórmulas (C) para resolver un triángulo en que se conozcan dos lados y el ángulo comprendido, á causa de que no se prestan al cálculo logarítmico; pero por medio de algunas transformaciones hechas en ellas y en las (R), podremos encontrar otras que nos proporcionen el fin deseado.

En efecto, de las fórmulas (R) se deducen estas otras

$$\cos. A + \cos. B \cos. C = \cos. a \text{ sen. } B \text{ sen. } C$$

$$\cos. B + \cos. A \cos. C = \cos. b \text{ sen. } A \text{ sen. } C$$

Dividiendo la primera de estas por la segunda, resulta

$$\frac{\cos. A + \cos. B \cos. C}{\cos. B + \cos. A \cos. C} = \frac{\cos. a \text{ sen. } B}{\cos. b \text{ sen. } A}$$

Pero como

$$\frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } A} = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}$$

(§. 97), será sustituyendo

$$\frac{\cos.\ A+\cos.\ B\cos.\ C}{\cos.\ B+\cos.\ A\ \cos.\ C}=\frac{\cos.\ a\ \text{sen.}\ b}{\cos.\ b\ \text{sen.}\ a}\qquad(1)$$

Añadiendo la unidad á ambos miembros de esta última, y reduciendo los enteros á quebrados será

$$\frac{\cos.\ B+\cos.\ A\cos.\ C+\cos.\ A+\cos.\ B\cos.\ C}{\cos.\ B+\cos.\ A\ \cos.\ C}=$$

$$\frac{\text{sen.}\ a\ \cos.\ b+\text{sen.}\ b\ \cos.\ a}{\text{sen.}\ a\ \cos.\ b}$$

ecuacion que se puede poner bajo esta forma:

$$\frac{(\cos.\ A+\cos.\ B)\ \text{sus. ver.}\ C}{\cos.\ B+\cos.\ A\ \cos.\ C}=\frac{\text{sen.}\ (a+b)}{\text{sen.}\ a\ \cos.b}\qquad(2)$$

Si en vez de añadir la unidad se restase de ambos miembros de la ecuacion (1) resultaria, despues de reducir los enteros à quebrados

$$\frac{\cos.\ A+\cos.\ B\ \cos.\ C-\cos.\ B-\cos.\ A\ \cos.\ C}{\cos.\ B+\cos\ A\ \cos.\ C}=$$

$$\frac{\text{sen.}\ b\ \cos.a-\text{sen.}\ a\ \cos.\ b}{\text{sen.}\ a\ \cos.\ b}$$

de la que se deduce esta otra

$$\frac{(\cos. A-\cos. B)\ \text{sen. ver.}\, C}{\cos. B+\cos. A\cos. C}=\frac{\text{sen.}\,(b-a)}{\text{sen.}\, a\cos. b} \quad (3)$$

Dividiendo ordenadamente la (3) por la (2) tendremos

$$\frac{\cos. A-\cos. B}{\cos. A+\cos. B}\times\frac{\text{sen. ver.}\, C}{\text{sus. ver.}\, C}=\frac{\text{sen.}\,(b-a)}{\text{sen.}\,(a+b)}$$

y como

$$\frac{\text{sen. ver.}\, C}{\text{sus. ver.}\, C}=\text{tang.}^2\, \tfrac{1}{2}C$$

(§. 10), se puede transformar la ecuacion anterior en

$$\frac{\cos. A-\cos. B}{\cos. A+\cos. B}\times\text{tang.}^2\, \tfrac{1}{2}C=\frac{\text{sen.}\,(b-a)}{\text{sen.}\,(a+b)} \quad (4)$$

Pero con arreglo á la fórmula

$$\text{sen. } 2A=2\text{sen. } \tfrac{1}{2}A\cos. \tfrac{1}{2}A$$

(§ 29 cor.) será

$$\text{sen. }(b-a)=2\text{sen. } \tfrac{1}{2}(b-a)\cos. \tfrac{1}{2}(b-a)$$

$$\text{sen. }(a+b)=2\text{sen. } \tfrac{1}{2}(a+b)\cos. \tfrac{1}{2}(a+b)$$

Ademas de las fórmulas (f) y (e) (§§. 48 y 49) se saca dividiendo esta por aquella

$$\frac{\cos.\ A-\cos.\ B}{\cos.\ A+\cos.\ B}=\frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(A+B)\ \text{sen.}\ \frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)\ \cos.\ \frac{1}{2}(B-A)}$$

de donde se deduce que

$$\frac{\cos.\ A-\cos.\ B}{\cos.\ A+\cos.\ B}=\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B-A)$$

luego sustituyendo en la ecuacion (4) se transformará en

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(B-A)\ \text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}C= \frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(b-a)\ \cos.\ \frac{1}{2}(b-a)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(a+b)\ \cos.\ \frac{1}{2}(a+b)} \quad (5)$$

Atendiendo ahora à que de la analogia general se saca la proporcion

$$\text{sen.}\ B:\text{sen.}\ b::\text{sen.}\ A:\text{sen.}\ a$$

y que de esta sale tambien la siguiente

$$\text{sen.}\ B+\text{sen.}\ A:\text{sen.}\ B-\text{sen.}\ A::$$
$$\text{sen.}\ b+\text{sen.}\ a:\text{sen.}\ b-\text{sen.}\ a$$

tendremos

$$\frac{\text{sen. B}-\text{sen. A}}{\text{sen. B}+\text{sen. A}}=\frac{\text{sen. b}-\text{sen. a}}{\text{sen. b}+\text{sen. a}}$$

que por lo dicho (§. 47 cor.) se puede transformar en

$$\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}(B-A)}{\text{tang. }\frac{1}{2}(A+B)}=\frac{\text{tang. }\frac{1}{2}(b-a)}{\text{tang. }\frac{1}{2}(a+b)} \quad (6)$$

Multiplicando ordenadamente la ecuacion (5) por esta, y teniendo presente que

$$\text{tang.}=\frac{\text{sen.}}{\text{cos.}}$$

resultará por último

$$\text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}(B-A)\ \text{tang.}^2\ \tfrac{1}{2}C=\frac{\text{sen.}^2\frac{1}{2}(b-a)}{\text{sen.}^2\frac{1}{2}(a+b)}$$

De donde estrayendo las raices y teniendo presente que

$$\text{tang.}=\frac{1}{\text{cot}}$$

se deducirá esta otra

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B-A)=\text{cot. } \tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{sen. } \tfrac{1}{2}(a+b)} \quad (7)$$

Si dividiéramos la ecuacion (5) por la (6) en vez de multiplicarlas hallariamos del mismo modo que

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A+B)=\text{cot. } \tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(b-a)}{\text{cos. } \tfrac{1}{2}(a+b)} \quad (8)$$

Las dos fórmulas (7) y (8) nos pueden servir para hallar los dos ángulos A y B opuestos á los lados conocidos que aqui hemos supuesto ser a y b, y por lo que hace al tercer lado c le podrémos hallar en seguida por la fórmula

$$\text{sen. } c=\frac{\text{sen. } a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}$$

que se deduce de la analogia general.

111. Si los datos que tuviésemos para resolver un triángulo, fuesen un lado y los dos ángulos adyacentes, procederiamos de un modo análogo al del caso anterior.

De las fórmulas (C) sacariamos las siguientes

$$\cos. a - \cos. b \cos. c = \cos. A \text{ sen. } b \text{ sen. } c$$
$$\cos. b - \cos. a \cos. c = \cos. B \text{ sen. } a \text{ sen. } c$$

y dividiendo la primera por la segunda

$$\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\cos. b - \cos. a \cos. c} = \frac{\cos. A \text{ sen. } b}{\cos. B \text{ sen. } a}$$

y sustituyendo

$$\frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } A} \text{ en vez de } \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } a}$$

$$\frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\cos. b - \cos. a \cos. c} = \frac{\text{sen. } B \cos. A}{\text{sen. } A \cos. B} \quad (1)$$

Añadiendo la unidad á ambos miembros y reduciendo los enteros á quebrados

$$\frac{\cos. b - \cos. a \cos. c + \cos. a - \cos. b \cos. c}{\cos. b - \cos. a \cos. c} =$$

$$\frac{\text{sen. } A \cos. B + \text{sen. } B \cos. A}{\text{sen. } A \cos. B}$$

ecuacion que se puede poner bajo esta forma

$$\frac{(\cos. a+\cos. b) \text{ sen. ver. } c}{\cos. b-\cos. a \cos. c}=\frac{\text{sen. }(A+B)}{\text{sen. } A \cos. B} \quad (2)$$

Restando la unidad de ambos miembros de la ecuacion (1) en vez de añadirla, se tendria despues de reducir los enteros á quebrados

$$\frac{\cos a-\cos. b \cos. c-\cos. b+\cos a \cos. c}{\cos. b-\cos. a \cos. c}=$$

$$\frac{\text{sen. } B \cos. A-\text{sen. } A \cos. B}{\text{sen. } A \cos. B}$$

ó descomponiéndola como la anterior

$$\frac{(\cos. a-\cos. b) \text{ sus. ver. } c}{\cos. b-\cos. a \cos. c}=\frac{\text{sen. }(B-A)}{\text{sen. } A \cos. B} \quad (3)$$

Dividiendo esta por la (2) tendremos

$$\frac{\cos. a-\cos. b}{\cos. a+\cos. b}\times\frac{\text{sus. ver. } c}{\text{sen. ver. } c}=\frac{\text{sen. }(B-A)}{\text{sen. }(A+B)}$$

de donde se infiere que

$$\frac{\cos. a-\cos. b}{\cos. a+\cos. b}\times \cot.^2 \tfrac{1}{2} c=\frac{\text{sen. }(B-A)}{\text{sen. }(A+B)} \quad (4)$$

Procediendo ahora del mismo modo que en

el párrafo anterior, y fundándonos en las mismas razones, hallariamos la ecuacion

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(b-a)\ \text{cot.}^2\ \tfrac{1}{2}c = \frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(B-A)\ \cos.\ \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(A+B)\ \cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}\ (5)$$

Pero por las razones espuestas en el propio párrafo, tendriamos tambien que

$$\frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(b-a)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(a+b)} = \frac{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(B-A)}{\text{tang.}\ \frac{1}{2}(A+B)}\ (6)$$

Multiplicando ordenadamente la ecuacion (5) por estas y teniendo presente todo lo dicho en el párrafo anterior acerca de esto hallariamos por último

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(b-a) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c \times \frac{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\ \frac{1}{2}(A+B)}\ (7)$$

Dividiendo la ecuacion (5) por la (6) se obtendria finalmente

$$\text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}c \times \frac{\cos.\ \frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\ \frac{1}{2}(A+B)}\ (8)$$

Las dos últimas ecuaciones pueden servir para hallar el valor de los lados de un triángulo esférico siempre que conozcamos el del tercer lado y el de los ángulos opuestos á los dos primeros: pues en tal caso llamando c al lado conocido y por consiguiente A y B á los ángulos adyacentes al mismo, los dos lados opuestos serán a y b, cuya semisuma y semidiferencia y por consiguiente el valor de cada uno se hallan por medio de las fórmulas espresadas.

En cuanto al tercer ángulo C se hallarà por cualquiera de las fòrmulas

$$\text{sen. C}=\frac{\text{sen. c}\times\text{sen. A}}{\text{sen. a}}$$

$$\text{sen. C}=\frac{\text{sen. c}\times\text{sen. B}}{\text{sen. B}}$$

sacadas de la analogia general

112. Las fórmulas (7) y (8) de los dos párrafos que preceden, puestas en proporcion, se conocen con el nombre de *analogias de Neper*.

113. Si el lado conocido, que hemos representado por c, fuese igual á un cuadrante, la fórmula

$$\text{cos. C}=-\text{cos. A cos. B}+\text{cos. c sen. A sen. B}$$

se transformaría en

$$\text{cos. C}=-\text{cos. A cos. B}$$

por cuyo medio se determinaria el tercer ángulo C, y para hallar los dos lados que faltan servirian las fórmulas

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } A}{\text{sen. } C}$$

$$\text{sen. } b = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } B}{\text{sen. } C}$$

que se deducen, como ya sabemos, de la analogía general, y que por ser en este caso sen. c igual al radio se transforman en

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } C} \qquad \text{sen. } b = \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } C}.$$

114. Si los dos ángulos A y B fuesen iguales, la fórmula

$$\cos. C = -\cos. A \cos. B + \cos. c \text{ sen. } A \text{ sen. } B$$

se transformaria del mismo modo que en el pàrrafo (108) en

$$\text{sus ver. } C = \text{sen.}^2 A \text{ sus ver. } c$$

que sustituyendo en vez de sus. ver. su valor como en el párrafo citado, da por último

$$\cos. \tfrac{1}{2}C = \text{sen. } A \cos. \tfrac{1}{2}c$$

Los otros dos lados que ahora deben ser iguales (§. 71) se hallarian como antes por la fórmula

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } A}{\text{sen. } C}$$

115. Cuando en el triàngulo que se quiera resolver se conozcan dos lados, que supondremos ser *a* y *b*, y un àngulo tal como B opuesto á uno de ellos, se puede determinar el ángulo A, opuesto al otro lado conocido por la fórmula

$$\text{sen. } A = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } B}{\text{sen. } b}$$

Hecho esto se podrá ya determinar el tercer lado *c* por la fórmula

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}c = \frac{\cos. \frac{1}{2}(A+B)}{\cos. \frac{1}{2}(B-A)} \times \text{tang. } \tfrac{1}{2}(a+b)$$

que se deduce de la (8) (§. 111).

Ahora se puede ya determinar el tercer ángulo C por la fórmula

$$\text{sen. } C = \frac{\text{sen. } c \text{ sen. } A}{\text{sen. } a}$$

Por último, cuando en el triángulo que se haya de resolver se conozca un lado, que supondremos ser *b*, el ángulo opuesto B y uno de los adyacentes, tal como A, se determinará el lado *a* opuesto á este último por la fórmula

$$\text{sen. } a = \frac{\text{sen. b sen. A}}{\text{sen. B}}$$

En seguida se puede hacer uso para hallar el tercer lado *c* de la misma fórmula que en el párrafo anterior: ó si se quiere determinar antes el ángulo C se hará por esta otra

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}C = \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos. \tfrac{1}{2}(a+b)} \times \cot. \tfrac{1}{2}(A+B)$$

que se deduce de la (8) (§. 111) teniendo presente que

$$\cot. = \frac{1}{\text{tang.}}$$

y viceversa.

Determinado este ángulo se hallará despues el lado *c* por cualquiera de las fórmulas

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. a sen. C}}{\text{sen. A}} \qquad \text{sen. } c = \frac{\text{sen. b sen. C}}{\text{sen. B}}$$

De la resolucion de los triángulos esféricos rectángulos.

116. Se ha visto (§§. 108 y 109) que en algunos casos particulares se pueden resolver los triángulos esféricos sin valerse de las fórmulas que sirven para los casos generales. Esto es lo que acontece principalmente cuando los triángulos tienen ángulos rectos ó lados iguales á cuadrantes; pues con arreglo á lo dicho (§. 82) cuando el triàngulo de que se trate sea trirectàngulo, sus tres lados serán cuadrantes y vice-versa. Tambien se infiere de lo espuesto en el mismo párrafo, que si el triángulo fuese birectángulo los lados opuestos á los ángulos rectos serian cuadrantes y vice-versa. Veamos ahora que es lo que sucederá cuando los triángulos sean rectángulos, esto es, cuando no tengan más que un ángulo recto.

En este supuesto no hay que hacer mencion del caso en que se den los tres lados del triángulo, porque teniendo ademas el ángulo recto, habria mas datos de los necesarios.

117. Para conseguir la resolucion en todos los demas casos, no necesitamos de todas las fórmulas halladas hasta aqui, sino que bastarán las (C) y (R) (§. 100 y 107) y las (A) (B) (§. 99) que se deducen inmediatamente de la anologia general.

Representemos siempre por C el ángulo recto, y en este supuesto, por ser sen. $C=1$ y cos. $C=0$, resultará

$$\cos. c=\cos. a \cos. b \qquad \cos. A=\cos. a \operatorname{sen}. B$$

$$\cos. B=\cos. b \operatorname{sen}. A$$

y de las dos últimas se sacará

$$\cos. A=\frac{\cos. A}{\operatorname{sen}. B} \qquad \cos. b=\frac{\cos. B}{\operatorname{sen}. A}.$$

Sin mas que las tres fórmulas

$$\cos. c=\cos. a \cos. b \quad (1)$$

$$\cos. a=\frac{\cos. A}{\operatorname{sen}. B} \quad (2) \qquad \cos. b=\frac{\cos. B}{\operatorname{sen}. A} \quad (3)$$

y las A y B (§. 99) hay bastante para resolver los triángulos esféricos rectàngulos en todos los casos que pueden ocurrir.

118. Empecemos por el caso en que se conozcan los tres ángulos, y hallaremos los lados a y b por las fórmulas (2) y (3) del pàrrafo anterior: y en seguida se puede ya hallar el tercer lado c por la fórmula (1) del mismo párrafo.

Debe advertirse, que aunque un seno corresponde tanto á un arco como á su suplemento, en los triàngulos rectángulos no cabe duda acerca de esto, pues queda ya demostrado (§. 91) que en ellos los lados que forman el ángulo recto han de ser de la misma especie que los ángulos opuestos y vice-versa: tambien se debe saber por lo dicho (§. 90) si la hipotenusa ha de ser obtusa ó aguda.

119. Supongamos ahora que ademas del àngulo recto C, se conozcan uno de los lados que le forman, tal como *a* y la hipotenusa *c*.

En este caso se determinará el tercer lado *b* por la fórmula

$$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}$$

que se deriva de la (1) ya citada; y los ángulos A y B por estas otras

$$\text{sen. } A = \frac{\text{sen. } a}{\text{sen. } c} \quad \text{y} \quad \text{sen. } B = \frac{\text{sen. } b}{\text{sen. } c}$$

las cuales son las mismas (A) y (B) sustituyendo en ellas la unidad en lugar de sen. C, por ser recto el ángulo C.

Aqui no puede haber tampoco ninguna duda, porque si la hipotenusa es aguda, el ángulo B deberá ser de la misma especie que A, y lo mismo el lado *b*.

120. Si fuesen los datos el ángulo recto C y los dos lados a y b que lo forman se determinará la hipotenusa por la fórmula (1) (§. 117); y los dos ángulos A y B del mismo modo que en el caso anterior.

121. Si los datos fueran ademas del ángulo recto C otro ángulo tal como B y el lado a adyacente á él, se determinaria el otro ángulo A por la fórmula

$$\cos. A = \cos. a \text{ sen. } B$$

en seguida se hallarian los lados b y c por las fórmulas (3) y (1) (§. 117).

122. Cuando ademas del ángulo recto C se conozca la hipotenusa c y uno de los otros ángulos tal como A, se puede determinar el lado opuesto á este por la fórmula

$$\text{sen. } a = \text{sen. } c \text{ sen. } A$$

sin que quepa duda ninguna acerca de si a ha de ser obtuso ó agudo, pues tiene que ser de la misma especie que A: en seguida se determinará el valor de b por la fórmula

$$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. a}$$

que se saca de la (1), y el de B por la

$$\cos. B = \cos. b \text{ sen. } A.$$

123. Finalmente, cuando los datos que se tengan, sean el ángulo recto C, uno de los otros, v. g. A, y el lado *a* opuesto á este último, se determinará el ángulo B por la fórmula

$$\text{sen. } B = \frac{\cos. A}{\cos. a}$$

sacada de la (2) (§. 117), el lado b por la (3) y en seguida la hipotenusa por la fórmula

$$\cos. c = \cos. a \cos. b$$

De los casos dudosos en los triangulos esféricos.

124. El último de los casos que nos hemos propuesto para la resolucion de los triángulos esféricos rectàngulos, puede dar lugar á duda, y aun ser enteramente insoluble.

En efecto, ya sabemos, por lo que queda dicho (§. 81) que todo triángulo esférico y su deficiente, tales como ABC y A′BC (fig. 31) tienen comun el lado que no se prolonga, que aqui es BC, y los ángulos A y A′ opuestos á dicho lado en cada uno de los triángulos son iguales. Si ademas suponemos que BC fuese perpendicular á ACA′, los dos ángulos en C serian rectos, y por consiguiente los dos triángulos ABC y A′BC tienen comun el lado

$$BC = a$$

iguales los dos ángulos A y A′; é iguales tambien los dos ángulos en C, por ser ambos rectos. Síguese de aqui, que estos datos convienen á ambos triángulos, y que en consecuencia deben resolverse los dos: lo que no aumenta mucho el trabajo, pues se ve que las partes buscadas del uno son suplemento de las del otro: esto es, la hipotenusa $c' = A'B$ del segundo, es suplemento de la del primero: el lado $b' = A'C$ del segundo lo es de $b = AC$; y tambien lo son el uno del otro los dos ángulos en B.

Cuando ademas de ser recto el àngulo C sean cuadrantes los dos lados AB y BC, el ángulo A serà tambien recto (§. 70); pero en este caso el punto B será el polo del arco ACA′ (§. 74): luego todos los arcos que se tiren desde dicho punto al referido arco serán cuadrantes, y por consiguiente puede haber una infinidad de triángulos con los datos espresados.

125. Pasando ya à los triángulos oblicuángulos, observaremos que en los dos primeros casos, esto es, cuando los datos son los tres lados ó los tres ángulos, no cabe ninguna duda, como se dijo en su lugar (§. 104).

126. Cuando se dan dos lados, tales como *a* y *b* y el ángulo comprendido, hemos visto (§. 110) que se determina el tercer lado *c* por la fórmula

$$\text{sen. } c = \frac{\text{sen. } a \text{ sen. } C}{\text{sen. } A}$$

pero la fórmula

$$\text{cos. } c = \text{cos. } a \text{ cos. } b + \text{cos. } C \text{ sen. } a \text{ sen. } b$$

nos manifiesta que cos. c no puede ser negativo sino cuando el ángulo C y uno de los lados *a* ó *b* sean obtusos: ó cuando no siendo obtuso mas que el ángulo ó uno de los lados referidos, el tèrmino en que entre este sea mayor que el otro: luego el lado *c* serà agudo, siempre que no se verifique ninguna de estas circunstancias. Si ambos lados *a* y *b* fuesen obtusos, dependerá el resultado únicamente del valor de cos. C.

Lo mismo se puede decir respecto del cuarto caso.

127. En el quinto pueden corresponder los datos á dos triángulos ó á uno solo, como lo vamos á hacer ver.

Sea el triángulo ABC (fig. 32) cuyos lados AB y BC prolongaremos hasta formar el triángulo deficiente AB′C.

Si el ángulo B fuese recto, el triángulo seria rectángulo y corresponderia al caso de que se habló en el párrafo 119.

128. Si a=BC vale un cuadrante, B′C se-

rá otro cuadrante, y por consiguiente los datos convendrán á los dos triàngulos ABC y AB′C: luego hay dos soluciones.

129. Si a=b, como á lados iguales se han de oponer ángulos iguales, será tambien A=B: luego no hay duda.

130. Si *a* y *b*, sin ser iguales son suplemento uno de otro, como B′C es tambien suplemento de *a*, serà AC=b=B′C=a′: luego el triángulo AB′C será isósceles y no tendrá mas que dos datos iguales á los del ABC: á saber el lado AC, que es comun para ambos, y el àngulo B=B′.

131. Si BC=a fuese un cuadrante, B′C seria tambien otro cuadrante, y los dos triángulos ABC y AB′C tendrian el lado AC=b, comun, los ángulos opuestos B y B′ iguales, y tambien los lados BC y B′C: luego habrá dos soluciones.

132. Si el lado a=BC y el àngulo B (fig. 32) fuesen ambos agudos, podrà el caso ser dudoso ó no serlo; y para hacerlo ver empezaremos por observar que si desde C se tira un arco CD perpendicular á BAB′ será por lo demostrado (§. 69) CD<AC. Pero como segun se dijo en el mismo párrafo, el arco que mas se separe del perpendicular será el mas largo, y los que se separen igualmente serán iguales: si b=AC es mayor que a=BC no podrá caer dicho lado entre los puntos B y D. sino por la parte inferior de CD en un punto tal como F, que

diste del D mas que lo que dista B: luego no puede haber mas que un triángulo que será el BCF, á que convengan los datos espresados.

Pero si $b=AC$ fuese menor que $a=BC$, no solo podrá caer el lado b por la parte inferior de CD, tal como en CE, sino tambien por la parte superior tal como en CA, de manera que sea $AD=DE$: luego cuando sea $a>b$ hay dos soluciones.

133. Si siendo agudo el ángulo en B fuese el lado $a=BC$ mayor que un cuadrante, se podrá suponer que el triángulo es el AB′C, que reune las circunstancias antedichas; y entonces, segun lo que acabamos de decir, si $AC>BC$ no podrá caer dicho lado AC sino en un punto tal como F situado entre los D y B′, y de manera que sea $DF>BD$. Pero como BC es el suplemento de B′C, el suponer AC, ó lo que es lo mismo b mayor que BC, equivale á suponer $a+b>H$: luego cuando B es agudo y *a* obtuso $a+b>H$ no da mas que una solucion.

Si fuese $AC<BC$, ó lo que es lo mismo $b<BC$, podria caer dicho lado b, bien sobre AC ó bien sobre CE; lo que nos daria dos triángulos.

Pero el suponer $b<BC$ equivale por lo dicho antes, á suponer $a+b<H$: luego cuando B es agudo y a obtuso $a+b<H$ da dos soluciones.

134. Si el ángulo B fuese obtuso y el lado a fuese menor que un cuadrante: $a+b<H$ da

una solucion, y $a+b>H$ da dos soluciones.

Porque sea el triángulo ABC (fig. 33); y si desde C se tiran al arco BADB′, otro CD que le sea perpendicular y varios oblícuos, el perpendicular será el mas largo (§. 69. cor.), y de dos oblícuos será mas corto el que se separe mas del perpendicular: luego si $AC<B'C$, ó lo que es lo mismo b menor que el suplemento de a, no puede haber mas triángulo que el ABC; pues cualquiera otro arco que se tirase desde C á un punto tal como F situado entre D y B′ habia de ser mayor que B′C: lo que es contra el supuesto.

Pero de esto mismo se infiere, que si b es mayor que B′C, suplemento de a, ó lo que es lo mismo, si $a+b>H$, habrá dos triángulos BCG y BCL que reunirán los mismos datos.

135. Si el ángulo B′ (fig. 33) y el lado $a=B'C$ son ambos obtusos, $b<a$ no dará mas que una solucion, y $b>a$ dará dos.

En efecto, en el primer caso, esto es, cuando sea $b<a$ no puede haber mas triàngulo que reuna las condiciones propuestas que el AB′C, pues cualquier otro arco que se tirase desde C à un punto tal como F situado entre D y B′ habia de ser mayor que B′C: lo que es contra el supuesto. Luego el lado b no puede estar situado sino por la parte superior de CD.

Pero como tanto por la parte superior del punto D como por la parte inferior del mismo se pueden tirar desde C arcos mayores que

B'C, resulta que cuando b>a puede haber dos soluciones.

De algunas otras fórmulas que se deducen de las ya encontradas.

136. Aunque segun hemos visto, las fórmulas halladas hasta aqui son suficientes para la resolucion de los triángulos esféricos, como se hace mencion y uso de otras en los tratados de trigonometría esférica y en varias aplicaciones de esta ciencia, presentaremos aqui algunas de ellas.

De las fórmulas (C) (§. 100) se deducen las siguientes

$$\left.\begin{aligned}
\cos. A &= \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\operatorname{sen.} b \times \operatorname{sen.} c} \\[2ex]
\cos. B &= \frac{\cos. b - \cos. a \cos. c}{\operatorname{sen.} a \times \operatorname{sen.} c} \\[2ex]
\cos. C &= \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\operatorname{sen.} a \operatorname{sen.} b}
\end{aligned}\right\}(V)$$

De las (R) (§. 107) salen estas otras

$$\left.\begin{aligned}\cos.\ a&=\frac{\cos.\ A+\cos.\ B\cos.\ C}{\mathrm{sen.}\ B\times\mathrm{sen.}\ C}\\[2ex] \cos.\ b&=\frac{\cos.\ B+\cos.\ A\cos.\ C}{\mathrm{sen.}\ A\times\mathrm{sen.}\ C}\\[2ex] \cos.\ c&=\frac{\cos.\ C+\cos.\ A\cos.\ B}{\mathrm{sen.}\ A\times\mathrm{sen.}\ B}\end{aligned}\right\}(W$$

137. Si en las dos últimas ecuaciones del sistema (c) (§. 100) sustituimos en lugar de cos. a su valor tomado de la primera, nos resultarán las siguientes

$$\cos.\ b=\cos.\ b\cos.^2 c+$$

$$\cos.\ A\ \mathrm{sen.}\ b\ \mathrm{sen.}\ c\cos.\ c+\cos.\ B\ \mathrm{sen.}\ A\ \mathrm{sen.}\ c$$

$$\cos.\ c=\cos.\ c\cos.^2 b+$$

$$\cos.\ A\ \mathrm{sen.}\ c\ \mathrm{sen.}\ b\cos.\ b+\cos.\ C\ \mathrm{sen.}\ a\ \mathrm{sen.}\ b$$

que sustituyendo en ellas $1-\mathrm{sen.}^2$ en lugar de $\cos.^2$ y destruyendo en ambos miembros los dos términos semejantes que resultan, se transforman en

$$0 = -\cos. b \operatorname{sen.}^2 c +$$
$$\cos. A \operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} c \cos. c + \cos. B \operatorname{sen.} a \operatorname{sen.} c$$

$$0 = -\cos. c \operatorname{sen.}^2 b +$$
$$\cos. A \operatorname{sen.} c \operatorname{sen.} b \cos. b + \cos. C \operatorname{sen.} a \operatorname{sen.} b$$

de las cuales se deducen, dividiendo la primera por sen. c y la segunda por sen. b estas otras

$$\left.\begin{array}{c} \cos. B \operatorname{sen.} a = \\ \cos. b \operatorname{sen.} c - \cos. A \operatorname{sen.} b \cos. c \\ \cos. C \operatorname{sen.} a = \\ \cos. c \operatorname{sen.} b - \cos. A \operatorname{sen.} c \cos. b \end{array}\right\} (X)$$

Cada una de estas dos ecuaciones contiene cinco de las seis cosas que entran en un triángulo; pero si se quiere se puede eliminar una de ellas. En efecto, si en vez de sen. a sustituimos en la primera

$$\frac{\operatorname{sen.} b \operatorname{sen.} A}{\operatorname{sen.} B}$$

y en la segunda

$$\frac{\operatorname{sen.} c \operatorname{sen.} A}{\operatorname{sen.} C}$$

tendremos estas otras

$$\frac{\cos. B \,\text{sen.}\, b \,\text{sen.}\, A}{\text{sen.}\, B} =$$

$$\cos. b \,\text{sen.}\, c - \cos. A \,\text{sen.}\, b \cos. c$$

$$\frac{\cos. C \,\text{sen.}\, c \,\text{sen.}\, A}{\text{sen.}\, C} =$$

$$\text{sen.}\, b \cos. c - \cos. A \,\text{sen.}\, c \cos. b$$

las cuales se pueden poner bajo esta forma

$$\cot. B \,\text{sen.}\, b \,\text{sen.}\, A =$$

$$\cos. b \,\text{sen.}\, c - \cos. A \,\text{sen.}\, b \cos. c$$

$$\cot. C \,\text{sen.}\, c \,\text{sen.}\, A =$$

$$\text{sen.}\, b \cos. c - \cos. A \,\text{sen.}\, c \cos. b$$

de las que se deduce finalmente

$$\left.\begin{aligned} \cot. B &= \frac{\cos. b \,\text{sen.}\, c - \cos. A \,\text{sen.}\, b \cos. c}{\text{sen.}\, b \,\text{sen.}\, A} \\ \cot. C &= \frac{\text{sen.}\, b \cos. c - \cos. A \,\text{sen.}\, c \cos. b}{\text{sen.}\, c \,\text{sen.}\, A} \end{aligned}\right\} (Y)$$

Del mismo modo se hallaria que

$$\cot. A = \frac{\cos. a \operatorname{sen}. c - \cos. B \operatorname{sen}. a \cos. c}{\operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. B}$$

y permutando los lados se tendrian estas otras

$$\cot. A = \frac{\cos. a \operatorname{sen}. b - \cos. C \operatorname{sen}. a \cos. b}{\operatorname{sen}. a \operatorname{sen}. C}$$

$$\cot. B = \frac{\cos. b \operatorname{sen}. a - \cos. C \operatorname{sen}. b \cos. a}{\operatorname{sen}. b \operatorname{sen}. C}$$

$$\cot. C = \frac{\cos. c \operatorname{sen}. a - \cos B \operatorname{sen}. c \cos. a}{\operatorname{sen}. c \operatorname{sen}. B}$$

138. Como estas fórmulas están deducidas de las (C) (§. 100) se podràn mudar en ellas los lados en los àngulos opuestos y viceversa, y entonces tendriamos

$$\left.\begin{array}{l}
\cot. a = \dfrac{\cos. A \operatorname{sen}. C + \cos. b \operatorname{sen}. A \cos. C}{\operatorname{sen}. A \operatorname{sen}. b} \\[2ex]
\cot. b = \dfrac{\cos. B \operatorname{sen}. C + \cos. a \operatorname{sen}. B \cos. C}{\operatorname{sen}. B \operatorname{sen}. a} \\[2ex]
\cot. c = \dfrac{\cos. C \operatorname{sen}. B + \cos. a \operatorname{sen}. C \cos. B}{\operatorname{sen}. C \operatorname{sen}. a} \\[2ex]
\cot. a = \dfrac{\cos. A \operatorname{sen}. B + \cos. c \operatorname{sen}. A \cos. B}{\operatorname{sen}. A \operatorname{sen}. c} \\[2ex]
\cot. b = \dfrac{\cos. B \operatorname{sen}. A + \cos. c \operatorname{sen}. B \cos. A}{\operatorname{sen}. B \operatorname{sen}. c} \\[2ex]
\cot. c = \dfrac{\cos. C \operatorname{sen}. A + \cos. b \operatorname{sen}. C \cos. A}{\operatorname{sen}. C \operatorname{sen}. b}
\end{array}\right\} (\ $$

Estas mismas, pasando uno de los factores del denominador al primer miembro, y teniendo presente que

$$\frac{\cos.}{\operatorname{sen}.} = \cot.$$

se transforman en las siguientes

$$\left.\begin{array}{l}
\text{cot. a sen. b} = \text{sen. C cot. A} + \text{cos. b cos. C} \\
\text{cot. b sen. a} = \text{sen. C cot. B} + \text{cos. a cos. C} \\
\text{cot. c sen. a} = \text{sen. B cot. C} + \text{cos. a cos. B} \\
\text{cot. a sen. c} = \text{sen. B cot. A} + \text{cos. c cos. B} \\
\text{cot. b sen. c} = \text{sen. A cot. B} + \text{cos. c cos. A} \\
\text{cot. c sen. b} = \text{sen. A cot. C} + \text{cos. b cos. A}
\end{array}\right\}(AA)$$

139. Todas estas fórmulas se simplifican tambien mucho cuando el triángulo es rectángulo: asi por ejemplo, cuando el àngulo C sea recto se convertirán las dos primeras fórmulas (Z) en

$$\text{cot. a} = \frac{\text{cos. A}}{\text{sen. A sen. b}} = \frac{\text{cot. A}}{\text{sen. b}}$$

$$\text{cot. b} = \frac{\text{cos. B}}{\text{sen. B sen. a}} = \frac{\text{cot. B}}{\text{sen. a}}$$

y en las fórmulas (AA) tendremos, bajo el mismo supuesto

$$\text{cot. a sen. b} = \text{cot. A} \qquad \text{cot. b sen. a} = \text{cot. B}$$

$$\text{cot. c sen. a} = \text{cos. a cos. B}$$

$$\text{cot. c sen. b} = \text{cos. b cos. A}$$

EJEMPLOS.

140. Concluirémos esta materia proponiendo algunos ejemplos de resolucion de triángulos esféricos.

1.º *Resolver un triángulo esférico cuyos tres lados* a, b, c, *son conocidos.*

Datos.	P. B
$a=100^\circ$	$A=101^\circ\ 23'\ 34''$
$b=74^\circ\ 24'$	$B=73^\circ\ 29'\ 10''$
$c=86^\circ\ 32'$	$C=83^\circ\ 30'\ 42''$

Para resolver este triángulo por las fórmulas (G) (§. 102), empezaremos por observar que dichas fórmulas están deducidas tomando el radio por unidad; pero cuando no sea asi debe multiplicarse su numerador por el factor R. Hecha esta observacion procederemos como sigue para hallar el ángulo A.

10.3010300=log. 2+log. R
9.8812612=log. sen. 49° 32'=
log. sen. $\frac{1}{2}$(a+b+c)
9.7050397=log. sen. 30° 28'=
log. sen. $\frac{1}{2}$(b+c—a)
0.0163004=comp. log. sen. 74° 24'
0.0007954=comp. log. sen. 86° 32'
29.9044267

9.9044267=log. sus. ver. 101° 23' 34"

Las dos decenas de la característica de la suma se rebajan á causa de los dos complementos logarítmicos de que se ha hecho uso: pero si se prescinde del logaritmo del radio no habrà que rebajar mas que una. De esta manera lo haremos en los dos cálculos siguientes, en los cuales se omitirá por esta razon una decena de la característica final.

Para hallar el ángulo B tendremos

0.3010300=log. 2
9.8812612=log. sen. 49° 32'=
log. sen. $\frac{1}{2}$(a+b+c)
9.9189146=log. sen. 56° 4'=
log. sen. $\frac{1}{2}$(a—b+c)
0.0066485=comp. log. sen. 100
0.0007954=comp. log. sen. 86° 32'
10.1086497=log. sus. ver. 73° 29' 10"

Para hallar el ángulo C será

$0.3010300 = \log. 2$
$9.8812612 = \log. \text{sen}. 49^\circ\ 32'$
$9.8412474 = \log. \text{sen}. 43^\circ\ 56' =$
$\qquad \log. \text{sen}. \frac{1}{2}(a+b-c)$
$0.0066485 = \text{comp}. \log. \text{sen}. 100^\circ$
$0.0163004 = \text{comp}. \log. \text{sen}. 74^\circ\ 24'$
$\overline{10.0464875} = \log. \text{sus. ver}. 83^\circ\ 30'\ 46''$

Para resolver el mismo triángulo por las fórmulas (H) (§. 103) observaremos que con arreglo á dichas fórmulas, cuando no se toma el radio por unidad se tiene

$$\log. \text{sen}. \tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}[\log. R^2 + \log. \text{sen}. \tfrac{1}{2}(b-c+a) + \log. \text{sen}. \tfrac{1}{2}(a-b+c) - \log. \text{sen}. b - \log. \text{sen}. c]$$

por lo que procederemos como se ve á continuacion

$29.8412474 = \log. R^2 + \log. \text{sen}. 43^\circ\ 56'$
$9.9189146 = \log. \text{sen}. 56^\circ\ 4'$
$0.0163004 = \text{comp}. \log. \text{sen}. 74^\circ\ 24'$
$0.0007954 = \text{comp}. \log. \text{sen}. 86^\circ\ 32'$
$\overline{39.7772578}$
19.7772578
$9.8886289 = \log. \text{sen}. 50^\circ\ 41'\ 47''$

Siendo este el valor de $\frac{1}{2}$ A, el de A será $101^\circ\ 23'\ 34''$.

Aqui se puede omitir el rebajar en la càracterìstica de la suma las dos decenas correspondientes á los complementos logarítmicos, siempre que se omita tambien el logaritmo de R^2, y asi lo haremos para los otros dos àngulos.

Para hallar el valor de B tendremos

9.8412474=log. sen. 43° 56′
9.7050397=log. sen. 30° 28′
0.0066485=comp. log. sen. 100°
0.0007954=comp. log. sen. 86° 32′
19.5537310

9.7768655=log. sen. 36° 44′ 35″

Luego B=73° 29′ 10″

Para el ángulo C serà

9.9189146=log. sen. 56° 4′
9.7050397=log. sen. 30° 28′
0.0066485=comp. log. sen. 100°
0.0163004=comp. log. sen. 74° 24′
19.6469032

9.8234516=log. sen. 41° 45′ 23″

Luego C=83° 30′ 46″

2.° ejemplo. *Resolver un triángulo en que se conocen dos lados* a b *y el àngulo comprendido* C.

Datos.	P. B.
$a=64°\ 16'$	$A=65°\ 29'\ 18''$
$b=78°\ 36'$	$B=98°\ 3'\ 36''$
$C=48°\ 30'$	$c=47°\ 51'\ 38''$

Con arreglo á las fórmulas (7) y (8) (§. 110) procederemos como aqui se ve.

$$\begin{array}{l}
10.3463369=\text{log. cot. } 24°\ 15'=\text{log. cot. } \tfrac{1}{2}C \\
\ \ 9.0960615=\text{log. sen. } 7°\ 10'=\text{log. sen. } \tfrac{1}{2}(b-a) \\
\ \ \underline{0.0232128}=\text{comp. log. sen. } 71°\ 26' \\
19.466112\ \ (*) \\
\ \ 9.4656112=\text{log. tang. } \tfrac{1}{2}(B-A)= \\
\qquad\qquad\qquad \text{log. tang. } 16°\ 17'\ 9''
\end{array}$$

Para hallar la tangente de $\frac{1}{2}(A+B)$ tendremos

$$\begin{array}{l}
10.3463369=\text{log. cot. } 24°\ 15' \\
\ \ 9.9965937=\text{log. cos. } 7°\ 10' \\
\ \ \underline{0.4970162}=\text{comp. log. cos. } 71°\ 26' \\
20.8399468 \\
10.8399468=\text{log. tang. } 81°\ 46'\ 27''
\end{array}$$

(a) Aqui se rebaja la decena á la característica por razon del complemento logarítmico de que se ha hecho uso.

Conocidas ya la semisuma y la semidiferencia de los dos àngulos A y B, hallaremos que el mayor vale 98° 3′ 36″ y el menor 65° 29 18″.

Para hallar ahora el tercer lado c tendremos

$$
\begin{array}{l}
9.9546402 = \text{log. sen. } 64^\circ\ 16' = \text{log. sen. a} \\
9.8744561 = \text{log. sen. } 48^\circ\ 30' = \text{log. sen. C} \\
\underline{0.0410241 = \text{comp. log. sen. } 65^\circ\ 29'\ 18''} \\
19.8701204
\end{array}
$$

$$9.8701204 = \text{log. sen. } 47^\circ\ 51'\ 38'' = \text{log. sen. c}$$

Ejemplo 3.° *Resolver un triàngulo esférico con los datos siguientes.*

Datos.	P. B.
A=69° 34′	a=67° 1′ 55″
B=63° 28′	b=61° 31′ 34″
C=90°	c=79° 16′ 45″

Siendo rectángulo este triángulo, le resolveremos con arreglo à lo dicho (§. 118) y sin hacer uso de los complementos logarítmicos, porque no se ganaria nada en ello.

$$
\begin{array}{l}
19.5429713 = \text{log. R} + \text{log. cos. } 69^\circ\ 34' \\
\underline{\ 9.9516651 = \text{log. sen. } 63^\circ\ 28'} \\
\ 9.5913062 = \text{log. cos. } 67^\circ\ 1'\ 55''
\end{array}
$$

$$19.6500338 = \log. R + \log. \cos. 63^\circ\ 28'$$
$$9.9717762 = \log. \text{sen.}\ 69^\circ\ 34'$$
$$9.6782576 = \log. \cos. 61^\circ\ 31'\ 34''$$

$$9.6782576 = \log. \cos. 61^\circ\ 31'\ 34''$$
$$9.5913062 = \log. \cos. 67^\circ\ 1'\ 55''$$
$$19.2695638$$

$$9.2695638 = \log. \cos. 79^\circ\ 16'\ 45''$$

Ejemplo 4.° *Resolver un triángulo esférico con los datos siguientes.*

Datos.	P. B.
$a=68^\circ\ 30'$	$B=66^\circ\ 14'\ 44''$
$A=70^\circ\ 24'$	$b=64^\circ\ 40'\ 54''$
$C=90^\circ$	$c=80^\circ\ 59'\ 2''$

Para hallar el ángulo B nos valdremos con arreglo á lo dicho (§. 123) de la fórmula

$$\text{sen. } B = \frac{\cos. A}{\cos. a}$$

la cual cuando no se toma el radio por unidad, es

$$\text{sen. } B = \frac{R\ \cos. A}{\cos. a}$$

$$
\begin{array}{l}
19.5256298 = \log. R + \log. \cos. 70^\circ\ 24' \\
\underline{\ 9.5640754 = \log. \cos. 68^\circ\ 30'} \\
\ 9.9615544 = \log. \operatorname{sen}. 66^\circ\ 14'\ 44''
\end{array}
$$

Para hallar el lado *b* usaremos de la fórmula

$$\cos. b = \frac{R \cos. B}{\operatorname{sen}. A}$$

$$
\begin{array}{l}
19.6051085 = \log. R + \log. \cos. 66^\circ\ 14'\ 44'' \\
\underline{\ 9.9740774 = \log. \operatorname{sen}. 70^\circ\ 24'} \\
\ 9.6310311 = \log. \cos. 64^\circ\ 40'\ 54''
\end{array}
$$

La fórmula

$$\cos. c = \frac{\cos. a \cos. b}{R}$$

nos servirá para hallar la hipotenusa.

$$
\begin{array}{l}
\ 9.6310311 = \log. \cos. 64^\circ\ 40'\ 54'' \\
\underline{\ 9.5640754 = \log. \cos. 68^\circ\ 30'} \\
19.1951065
\end{array}
$$

$$9.1951065 = \log. \cos. 80^\circ\ 59'\ 2''$$

Ahora debemos tener presente que el caso que acabamos de proponernos, admite dos soluciones (§. 124); pero con arreglo á lo dicho en el mismo párrafo debe ser para el otro triángulo.

$$B'=133^\circ\ 45'\ 16''$$

$$b'=115^\circ\ 19'\ 6''$$

$$c'=99^\circ\ 0'\ 58''$$

que son los suplementos de las partes buscadas en el primer triángulo.

De algunas aplicaciones de las trigonometrías.

141. Entre las varias aplicaciones de la trigonometría, es una de las principales la que se hace de ella para el levantamiento de planos, esto es, para representar en un plano un terreno cualquiera, colocando sus puntos principales, de manera que conserven en el plano el mismo órden de situacion y distancias proporcionales á las que tienen en el terreno.

Bien se deja conocer que cuando algunas de estas distancias sean inaccesibles, ó no se quiera medirlas directamente por no alargar la operacion, habrá que recurrir ó á la semejanza de las figuras ó á la resolucion de los triángulos que son las bases sobre que estriba todo el arte del levantamiento de planos: lo que aclararemos con algunos ejemplos.

1.º *Medir una distancia* AB (fig. 34) *inaccesible por uno de sus estremos, tal como* B.

Para conseguirlo tirariamos por el punto A una recta cualquiera AC (*) de la longitud que nos pareciere, y desde el punto C se tirará una visual al punto B. En seguida midiendo con un instrumento á propósito los dos ángulos A y C, se conocerán en el triángulo ABC un lado AC y los dos ángulos adyacentes, por lo que se podrá resolver dicho triángulo y hallar el valor del lado AB.

Si al ejecutar la operacion antedicha no hubiera ningun instrumento con que medir los ángulos, habria que apelar á la semejanza de las figuras; para lo cual despues de haber tirado la AC de manera que fuese perpendicular á AB, se la prolongaría todo lo que se qui-

---

(*) Las rectas se marcan en el terreno por medio de piquetes y jalones, y se miden con cadenas ó cuerdas; pero no nos detendremos á entrar en esplicaciones acerca de esto, porque por largas y minuciosas que fuesen, no darian mas que una idea muy confusa del asunto, mientras no se presenten á la vista dichos objetos y se vea tambien practicar una de estas operaciones: en cuya caso desaparece toda la confusion y oscuridad. Por la misma razon no se entrará en la descripcion de ninguno de los instrumentos de que se hace uso para medir los ángulos.

siere, y en el estremo D de la prolongacion se tiraria otra recta DE perpendicular á la AC, y se buscaria en ella el punto F que estuviese en linea recta con los puntos B y C colocando préviamente en este último alguna señal; y por la semejanza de los triángulos ABC y CDF se tendria la proporcion

$$CD : DF :: AC : AB$$

con lo que se averiguaria lo longitud de esta última linea.

Si las distancias CD y AC se tomasen iguales, se ahorraria la proporcion, pues los triángulos ABC y CDF serian entonces iguales, y por consiguiente $AB = DF$.

2.° *Medir una distancia* AB (fig. 35) *accesible por ambos estremos, pero no por sus puntos medios por impedirlo un obstáculo cualquiera.*

Esto se haria como en el caso anterior, tirando las visuales AC y BC desde el punto C que se creyese mas conveniente: con lo que midiendo el ángulo C se conocerian en el triángulo ABC dos lados y el ángulo comprendido, y se podria resolver el triángulo; y aun con mas facilidad midiendo tambien uno de los otros ángulos A ó B y tomando por datos un lado y los dos ángulos adyacentes.

Si no hubiese instrumentos con que medir los ángulos, se prolongarian los lados AC y BC hasta que sus prolongaciones CD y CF fuesen iguales á los mismos lados ó partes alícuotas suyas, y se tiraria la DF, con lo que se tendria un nuevo triángulo CDF igual ó semejante al ABC. Si eran iguales se tendria AB=DF, y si eran semejantes se haria la misma proporcion que en el ejemplo anterior.

3.° *Medir una distancia* AB (fig. 36) *inaccesible por ambos estremos, pero accesible por sus puntos medios.*

Esto se puede hacer fàcilmente como en el primer ejemplo, dividiendo la distancia que se quiere medir en dos segmentos. Con este fin desde cualquier punto D se tirará una recta DC á la AB y las visuales AD y BD á sus estremos, y en los triángulos ACD y BCD se conocerá el lado CD que es comun á ambos, y ademas los ángulos adyacentes al mismo. De esta manera se hallarán por separado las distancias AC y BC, que sumadas darán la que se queria medir.

Si no hubiese instrumentos para medir los ángulos, se tiraria por un punto cualquiera de la CD tal como E, una paralela FG á la AB, con lo que los triángulos ABD y DFG serian semejantes y nos darian la proporcion

$$DE:CD::FG:AB$$

4.° *Medir una distancia* AB (fig. 37) *inaccesible por todos sus puntos.*

Tírese en el terreno una linea recta CD, procurando sea igual en longitud à la AB, y tan paralela á ella como se pueda graduar con la vista, á fin de que no resulten ángulos muy agudos en los triangulos que se han de formar despues. Hecho esto, diríjanse desde el punto C las visuales AC y BC á los estremos de la AB, y desde el punto D las AD y BD. De aqui resulta que se podrán ya resolver los triàngulos ACD y BCD, como que en ambos conocemos un lado CD y los dos ángulos adyacentes. Con esto llegaremos á conocer la longitud de las dos lineas AD y BD y podremos resolver el triángulo ADB en el que conocemos dos lados y el ángulo comprendido, y hallar en consecuencia la longitud de AB.

Si no hubiese instrumentos para medir los ángulos, despues de tiradas las antedichas visuales, se tomará en DE un segmento EG que sea parte alícuota suya, y en la CE otro segmento EF que sea la misma parte alicuota de CE: con lo que si se tirase la FG los triángulos CED y FEG serian semejantes. Hecho esto, tírese por el punto G una recta GY paralela à BD, y por el punto F otra recta FH paralela á la AC: con lo que los triángulos BED y GEY serán semejantes entre sí, y tambien lo serán los AEC y FEH. Si ahora se une el punto H con el punto Y, la recta HY que corta en partes proporcionales los lados AE y BE del triángulo AEB, será paralela à la AB, y por consiguiente los dos triángulos AEB y HEY serán tambien semejantes. Resulta de todo esto, que los dos cuadrilàteros ABCD y FGYH son semejantes, como que se componen de un mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos: luego tendremos esta proporcion

FG : CD :: HY : AB

Debe advertirse que las partes EF y EG se han de tomar de una magnitud tal que la HY caiga fuera del obstáculo que impida llegar hasta la AB.

De un modo análogo se procederà en la medicion de las alturas, las cuales no son mas que distancias colocadas en direccion vertical.

5.° Asi pues, *si se quiere medir* una altura AB (fig. 38) se colocaria el instrumento D que se tuviese para medir los ángulos, en cualquier punto C del terreno, se mediria la distancia CA al pie de la altura y se dirigiria al estremo de esta última la visual BD. De esta manera se tendria un triángulo rectángulo BED en el que conoceriamos ademas del ángulo recto E, el ángulo D y el cateto DE=AC; y resolviéndole se hallaria el valor de BE, á lo que habria que añadir AE=CD altura del instrumento para completar la que se queria medir.

Si no hubiese instrumento con que medir los ángulos, se colocarian verticalmente en el terreno, y uno tras otro, dos jalones bn, Cp (fig. 39) situados de manera que la visual CbB tirada por los estremos de ambos fuese á parar al estremo B de la altura; con lo que resultarian dos triángulos rectángulos semejantes abC, CDB, que darian la proporcion

$$aC:ab::CD:BD$$

y añadiendo luego la altura AD=Cp se tendria la altura total AB.

Si hubiese algun obstáculo que impidiese llegar hasta el pie A de la altura, se medirian las distancias AC y Ap (fig. 38 y 39) como inaccesibles por uno de sus estremos.

6.º *Reducir un ángulo al horizonte.*

Sea BAC (fig. 40) un ángulo situado en un plano inclinado, y AD la vertical tirada desde el punto A. Supóngase tirado á arbitrio el plano horizontal MN que corte las lineas AB, AC, AD en los puntos E, F y G, y el ángulo EGF será la proyeccion horizontal del BAC; ó lo que es lo mismo, será el BAC reducido al horizonte: por consiguiente lo que se trata de calcular es el citado ángulo EGF.

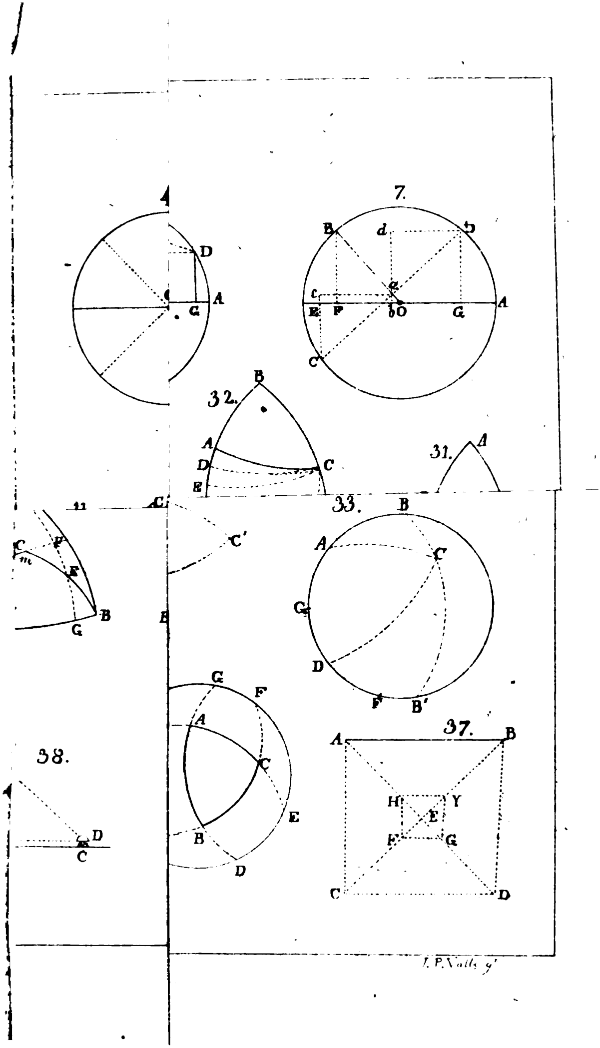
Para conseguirlo observaremos que si se describiese una esfera tomando por centro el punto A, los tres ángulos planos BAC, BAD y CAD determinan un triángulo esférico BCD cuyos tres lados son conocidos, como medidas que son de los tres ángulos planos que acabamos de citar, y en el que el ángulo BDC es igual al EGF que se quiere determinar.

El conocer el valor de los ángulos planos BAD y CAD se puede conseguir levantando en los puntos E y F las verticales EK y FL: pues entonces los ángulos KEA y BAD serán iguales por alternos internos, y lo mismo les sucederá á los LFA y CAD.

ÍNDICE.

FE DE ERRATAS.

PAG.	LINEA	DICE	LEASE
14	2	*sen.*$(\frac{1}{2}H=\frac{1}{2}A)$	*sen.*$(\frac{1}{2}H-A)$
23	9	*cos.ver.*$(H-m)-EP$	*cos. ver.* $(H-m)-PE$
57	3	el seno	al seno
80	3	*sen.* A=*sen.* B	*sen.* A—*sen.* B
Id.	31	*tang.*$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}c)$	*tang.*$(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}C)$


7.
32.
31.
33.
37.
38.